Risoluzione della verifica IN UN'ORA - SECONDA PROVA

1 **a)** Determiniamo il dominio di $y = f(x) = \text{arcsen}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ mettendo a sistema la condizione di esistenza del radicale e dell'arcoseno.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -1 \leq \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \leq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \geq -1 \\ \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \leq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \dfrac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \geq 0 \\ \dfrac{\sqrt{x}-1-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \geq 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{x}+1} \geq 0 \end{cases}$$

Le disequazioni irrazionali sono verificate $\forall x \in \mathbb{R}$ perché sia al numeratore che al denominatore sono presenti quantità positive o nulle.
Il dominio è quindi $D = [0; +\infty[$.

Calcoliamo le intersezioni con gli assi coordinati ponendo rispettivamente $x = 0$ e $y = 0$ nell'equazione della funzione.

$$x = 0 \rightarrow f(0) = \text{arcsen}(-1) = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \text{la funzione interseca l'asse } y \text{ nel punto di coordinate } \left(0; -\frac{\pi}{2}\right).$$

$$y = 0 \rightarrow 0 = \text{arcsen}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{la funzione interseca l'asse } x \text{ nel punto di coordinate } (1; 0).$$

Studiamo il segno della funzione.

$$y > 0 \rightarrow \text{arcsen}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} > 0 \rightarrow 0 < \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \leq 1 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} > 0 \rightarrow \sqrt{x}-1 > 0 \rightarrow x > 1 \\ \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \leq 1 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La funzione è positiva in $]1; +\infty[$ e negativa in $[0; 1[$.

b) Determiniamo il dominio di $y = f(x) = \dfrac{2^{3-x^2} - 4^x}{\ln(x^2-3)}$ mettendo a sistema la condizione di esistenza del logaritmo e della frazione.

$$\begin{cases} x^2 - 3 > 0 \\ \ln(x^2-3) \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3} \\ x^2 - 3 \neq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3} \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$$

Pertanto, il dominio è l'insieme $D =]-\infty; -2[\cup]-2; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; 2[\cup]2; +\infty[$.

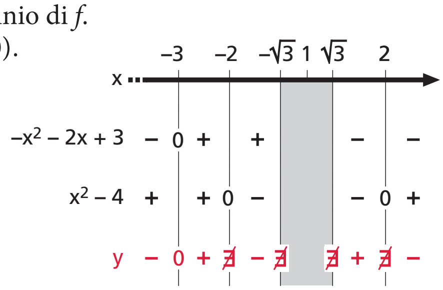
Calcoliamo le intersezioni con gli assi coordinati.
Osserviamo che $x = 0$ non appartiene al dominio della funzione, quindi non ci sono intersezioni con l'asse y.

$$y = 0 \rightarrow \frac{2^{3-x^2} - 4^x}{\ln(x^2-3)} = 0 \rightarrow 2^{3-x^2} = 2^{2x} \rightarrow 3 - x^2 = 2x \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = -3 \vee x = 1.$$

La soluzione $x = 1$ non è accettabile perché non appartiene al dominio di f.
La funzione interseca quindi l'asse x nel punto di coordinate $(-3; 0)$.

Studiamo il segno della funzione.

$$\frac{2^{3-x^2} - 4^x}{\ln(x^2-3)} > 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{3-x^2} > 2^{2x} \rightarrow -x^2 - 2x + 3 > 0 \\ \ln(x^2-3) > 0 \rightarrow x^2 - 4 > 0 \end{array}\right.$$



La funzione è positiva negli intervalli $]-3; -2[$ e $]\sqrt{3}; 2[$.

2 **a)** L'equazione generica della parabola con asse parallelo all'asse x è $x = ay^2 + by + c$.
Imponiamo le condizioni e determiniamo i coefficienti.

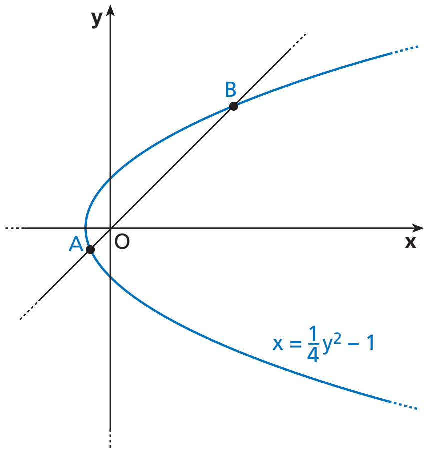
$$\begin{cases} y_V = -\dfrac{b}{2a} = 0 \to b = 0 \\ x_V = ay_V^2 + by_V + c \to -1 = c \to c = -1 \\ x_P = ay_P^2 + by_P + c \to 0 = 4a + 2b + c \to a = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

L'equazione della parabola è quindi $x = \dfrac{1}{4}y^2 - 1$.

b) Determiniamo il fuoco della parabola:

$$F\left(\frac{-\Delta + 1}{4a}; -\frac{b}{2a}\right) \to F(0; 0).$$

Scriviamo il fascio di rette di centro il fuoco della parabola e determiniamo i punti A e B d'intersezione con la parabola.



$$\begin{cases} y = mx \\ x = \dfrac{1}{4}y^2 - 1 \end{cases} \to \begin{cases} y = mx \\ x = \dfrac{1}{4}(mx)^2 - 1 \end{cases} \to \begin{cases} y = mx \\ m^2x^2 - 4x - 4 = 0 \end{cases}$$

Le intersezioni sono $A\left(\dfrac{2 - \sqrt{4 + 4m^2}}{m^2}; \dfrac{2 - \sqrt{4 + 4m^2}}{m}\right)$,

$B\left(\dfrac{2 + \sqrt{4 + 4m^2}}{m^2}; \dfrac{2 + \sqrt{4 + 4m^2}}{m}\right)$.

Poniamo la lunghezza della corda $\overline{AB} = 8$ e determiniamo m.

$$\overline{AB} = 8 \to \overline{AB}^2 = 64,$$

$$\left(\frac{2 + \sqrt{4 + 4m^2}}{m^2} - \frac{2 - \sqrt{4 + 4m^2}}{m^2}\right)^2 + \left(\frac{2 + \sqrt{4 + 4m^2}}{m} - \frac{2 - \sqrt{4 + 4m^2}}{m}\right)^2 = 64 \to$$

$$\to \left(\frac{2\sqrt{4 + 4m^2}}{m^2}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{4 + 4m^2}}{m}\right)^2 = 64 \to$$

$$\to \frac{16(1 + m^2)}{m^4} + \frac{16(1 + m^2)}{m^2} = 64 \to$$

$$\to 3m^4 - 2m^2 - 1 = 0 \to m^2 = 1 \vee m^2 = -\frac{1}{3} \text{ (impossibile)} \to m = \pm 1.$$

Le equazioni delle rette cercate sono $y = \pm x$.

(La retta del fascio di equazione $x = 0$, che non otteniamo per alcun valore di m, interseca la parabola nei punti di coordinate $(0; \pm 2)$ staccando una corda di lunghezza 4, pertanto non è una delle rette cercate.)

c) Consideriamo la retta di coefficiente angolare positivo, cioè la bisettrice del primo e terzo quadrante.

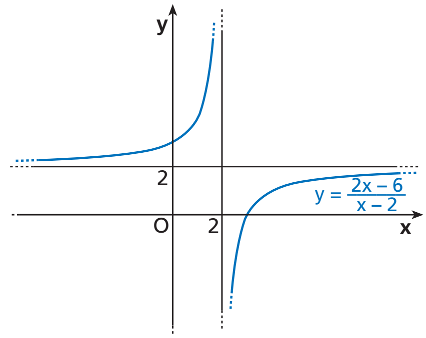
L'equazione generica di una funzione omografica è $y = \dfrac{mx + n}{px + q}$ ma, dato che $p \neq 0$, si può scrivere come

$y = \dfrac{\dfrac{m}{p}x + \dfrac{n}{p}}{x + \dfrac{q}{p}}$ ossia, posto $a = \dfrac{m}{p}$, $b = \dfrac{n}{p}$, $d = \dfrac{q}{p}$, come $y = \dfrac{ax + b}{x + d}$.

Se il centro della funzione omografica appartiene alla bisettrice, significa che gli asintoti della funzione s'intersecano in un punto della bisettrice, quindi $a = -d$. Mettiamo a sistema le condizioni imposte e determiniamo i coefficienti:

$$\begin{cases} 3 = \dfrac{b}{d} \to b = 3d \to b = -6 \\ 1 = \dfrac{4a+b}{4+d} \to 4 + d = -4d + 3d \to 2d = -4 \to d = -2 \\ a = -d \to a = 2 \end{cases}$$

L'equazione della funzione omografica è $y = \dfrac{2x-6}{x-2}$.



3 Indicando con α e β rispettivamente gli angoli di vertice A e B, osserviamo che α e β sono acuti in quanto hanno coseni positivi. Determiniamo il seno di α e β, accettando solo valori positivi:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{3}{5} \\ \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \dfrac{4}{5} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \cos\beta = \dfrac{12}{13} \\ \operatorname{sen}\beta = \dfrac{5}{13} \end{cases}$$

Calcoliamo ora cos γ. Utilizzando gli archi associati e la formula di addizione per il coseno abbiamo:

$$\cos\gamma = \cos(\pi-\alpha-\beta) = -\cos(\alpha+\beta) = -(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) = -\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} - \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}\right) = -\frac{16}{65} < 0$$

che dimostra che il triangolo è ottusangolo.
L'angolo esterno al triangolo nel vertice C è $\pi - \gamma$ e poiché $\operatorname{sen}(\pi-\gamma) = \operatorname{sen}\gamma$, otteniamo:

$$\operatorname{sen}\gamma = \sqrt{1-\left(\frac{16}{65}\right)^2} = \frac{63}{65}.$$

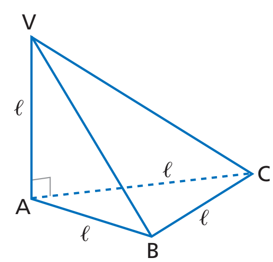
4 Rappresentiamo in figura una piramide di lato l.

La base della piramide è un triangolo equilatero di lato l, quindi l'area di base è :

$$Area(ABC) = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

Il volume della piramide è quindi dato da:

$$V = \frac{1}{3}l\cdot\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{l^3\sqrt{3}}{12}.$$



Il triangolo VBC è isoscele su BC che misura l, mentre i lati VB e VC misurano $l\sqrt{2}$. Detto H il punto medio di BC, per il primo teorema dei triangoli rettangoli è:

$$\overline{BH} = \overline{VB}\cos V\widehat{B}C \to \frac{l}{2} = l\sqrt{2}\cos V\widehat{B}C.$$

Otteniamo quindi:

$$\cos V\widehat{B}C = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

da cui $V\widehat{B}C = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.