Risoluzione della verifica IN UN'ORA - PRIMA PROVA

1 **a)** Per determinare il dominio di $y = \dfrac{x-3}{\ln|3-x| - \ln(x^2-9)}$, dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} |3-x| > 0 \text{ (per l'esistenza del logaritmo)} \\ x^2 - 9 > 0 \text{ (per l'esistenza del logaritmo)} \\ \ln|3-x| - \ln(x^2-9) \neq 0 \text{ (per l'esistenza della frazione)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x < -3 \vee x > 3 \\ \ln|3-x| \neq \ln(x^2-9) \end{cases}$$

Risolviamo la terza disequazione:

$$\ln|3-x| \neq \ln(x^2-9) \rightarrow |3-x| \neq x^2 - 9 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3 - x < 0 \\ -3 + x \neq x^2 - 9 \end{cases} \vee \begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ 3 - x \neq x^2 - 9 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x^2 - x - 6 \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2 + x - 12 \neq 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \neq -2 \vee x \neq 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 3 \\ x \neq -4 \vee x \neq 3 \end{cases} \rightarrow \quad x \neq -4 \wedge x \neq 3.$$

Pertanto, il dominio della funzione è $D =]-\infty; -4[\cup]-4; -3[\cup]3; +\infty[$.

b) Per determinare il dominio di $y = \dfrac{e^{\text{tg}\,x} - e^{\text{cotg}\,x}}{\sqrt{e^{\text{sen}\,x + \cos x} - 1}}$, in $[0; 2\pi]$, dobbiamo mettere a sistema le condizioni di esistenza delle funzioni $\text{tg}\,x$ e $\text{cotg}\,x$ in $[0; 2\pi]$, con la condizione di esistenza del radicale che si trova a denominatore:

$$\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} \wedge x \neq \dfrac{3\pi}{2} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq \pi \\ e^{\text{sen}\,x + \cos x} - 1 > 0 \end{cases}$$

Risolviamo:

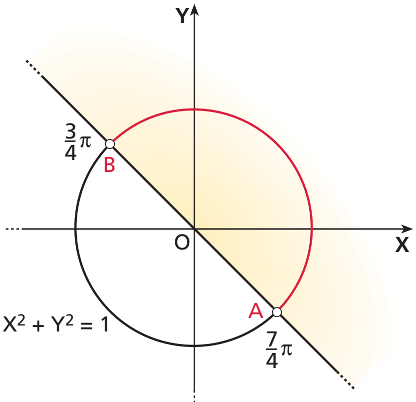
$$e^{\text{sen}\,x + \cos x} - 1 > 0 \rightarrow e^{\text{sen}\,x + \cos x} > e^0 \rightarrow \text{sen}\,x + \cos x > 0.$$

Utilizziamo il metodo grafico ponendo $X = \cos x$ e $Y = \text{sen}\,x$.

Trasformiamo quindi la disequazione nel sistema:

$$\begin{cases} Y + X > 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

che graficamente ha come soluzione i punti di intersezione tra il semipiano $Y + X > 0$ (di origine la bisettrice del II e IV quadrante) con la circonferenza goniometrica.



Dalla figura deduciamo che la soluzione è l'arco $\overset{\frown}{AB}$ a cui corrispondono, nell'intervallo $[0; 2\pi]$, gli angoli $x \in \left[0; \dfrac{3}{4}\pi\right[\cup \left]\dfrac{7}{4}\pi; 2\pi\right]$.

Tenendo conto delle condizioni iniziali otteniamo il dominio:

$$D = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3}{4}\pi\right[\cup \left]\frac{7}{4}\pi; 2\pi\right[.$$

2 Il sistema:

$$\begin{cases} x + ky - z = 1 \\ x - kz = k \\ ky + z = -2 \end{cases}$$

è composto da 3 equazioni in 3 incognite. Scriviamo la matrice incompleta A del sistema e la relativa matrice completa A':

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & -1 \\ 1 & 0 & -k \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & k & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -k & k \\ 0 & k & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

e calcoliamo il determinante D di A con la regola di Sarrus:

$$D = -k - (-k^2 + k) = k^2 - 2k = k(k-2).$$

Il determinante si annulla per $k = 0 \vee k = 2$.
Se $k \neq 0 \wedge k \neq 2$, il sistema è determinato e la soluzione si può trovare con il metodo di Cramer.
Ponendo:

$$D_x = \begin{bmatrix} 1 & k & -1 \\ k & 0 & -k \\ -2 & k & 1 \end{bmatrix}, D_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & k & -k \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, D_z = \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & k & -2 \end{bmatrix},$$

otteniamo:

$$x = \frac{\det D_x}{D} = \frac{k^2}{k(k-2)} = \frac{k}{k-2};$$

$$y = \frac{\det D_y}{D} = \frac{1-k}{k(k-2)};$$

$$z = \frac{\det D_z}{D} = \frac{k - (k^2 - 2k)}{k(k-2)} = \frac{3-k}{k-2}.$$

Se $k = 0$, il sistema diventa:

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ x = 0 \\ z = -2 \end{cases}$$

ossia il sistema è impossibile perché la differenza $x - z$ dovrebbe essere contemporaneamente uguale a 1 e a 2.
Se $k = 2$, le matrici A e A' diventano:

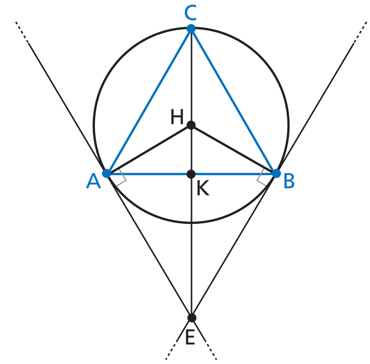
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo il loro rango.
La matrice A, che ha determinante nullo, ammette una sottomatrice di ordine 2 non nulla $\left(\text{per esempio} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$, quindi il rango di A è 2.
Consideriamo la matrice completa e calcoliamo il determinante della sottomatrice che si ottiene da A' eliminando la seconda colonna:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 1.$$

La matrice A' ha, quindi, rango 3.
Segue che le matrici completa e incompleta del sistema, che si ottengono sostituendo al parametro k il valore 2, hanno rango diverso. Pertanto, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è impossibile.

3 Rappresentiamo in figura il problema.



a) Per il teorema delle rette tangenti alla circonferenza i segmenti AE ed EB sono congruenti, quindi il triangolo ABE è isoscele e pertanto gli angoli $A\widehat{B}E$ e $E\widehat{A}B$ sono congruenti.

Inoltre, per il medesimo teorema, la retta passante per E e H è la bisettrice dell'angolo $A\widehat{E}B$. L'angolo $H\widehat{B}E$ è retto perché il raggio HB è perpendicolare alla tangente.

Poiché il triangolo ABC è equilatero, il circocentro H coincide con l'incentro e pertanto il segmento HB divide l'angolo $C\widehat{B}A$ in due parti uguali.
Abbiamo:

$$H\widehat{B}K = 30° \to B\widehat{H}K = 60° \to H\widehat{E}B = 30°.$$

In conclusione, l'angolo $A\widehat{E}B = 2H\widehat{E}B = 60°$, quindi il triangolo AEB è equilatero.

Affinché un quadrilatero sia inscrivibile in una circonferenza è necessario e sufficiente che gli angoli opposti siano supplementari.
Abbiamo:

$$H\widehat{A}E = H\widehat{B}E = 90° \to H\widehat{A}E + H\widehat{B}E = 180°,$$

$$A\widehat{H}B = 2 \cdot B\widehat{H}K = 120°,\ A\widehat{E}B = 60° \to A\widehat{H}B + A\widehat{E}B = 180°.$$

La condizione è verificata, pertanto il quadrilatero è inscrivibile.

b) Se fissiamo l'origine in A e l'asse x su AB, otteniamo: $B(1; 0)$, $C\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $K\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Poiché H è anche il baricentro del triangolo ABC, calcoliamo le sue coordinate con la formula $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ ottenendo $H\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$. Infine $E\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ in quanto anche il triangolo AEB è equilatero di lato unitario.

c) La circonferenza circoscritta al triangolo ABC ha centro in H e raggio $r = \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, quindi la sua equazione è $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{1}{3}$.

d) La circonferenza circoscritta al quadrilatero $AHBE$ coincide con la circonferenza circoscritta al triangolo rettangolo HAE. Il centro si trova quindi nel punto medio di HE ossia in $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ e il raggio è $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Quindi abbiamo: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{1}{3}$.

---

4 Le equazioni di una omotetia sono $\begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$, quindi, affinché la trasformazione:

$$\begin{cases} x' = (a-1)x + (b-2)y + b \\ y' = ax + (1-b)y + a - 1 \end{cases}$$

sia una omotetia, dobbiamo imporre: $\begin{cases} b - 2 = 0 \\ a = 0 \\ a - 1 = 1 - b \end{cases} \to \begin{cases} b = 2 \\ a = 0 \end{cases}$.

Pertanto, le equazioni della trasformazione sono: $\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y - 1 \end{cases}$.

Dallo studio della matrice dei coefficienti ricaviamo che la trasformazione è una simmetria centrale di centro $C\left(1; -\frac{1}{2}\right)$, per cui il centro e tutte le rette per C sono elementi uniti.