1 **a)** $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+k}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ se $x^2 + k \neq 0$, cioè per ogni $k > 0$.

b) e **c)** Se $k > 0$, non ci sono punti di discontinuità.

Se invece $k \leq 0$, la funzione è discontinua. Analizziamo separatamente i vari casi.

- Se $k = 0$, $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2}$ che ha in $x = 0$ un punto di discontinuità di II specie poiché $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+2}{x^2} = +\infty$.
- Se $k < 0 \wedge k \neq -4$, $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+k}$ ha due punti di discontinuità: $x = \pm\sqrt{-k}$. Calcoliamo i limiti per studiarne il tipo:

  $\lim\limits_{x \to \pm\sqrt{k}} \dfrac{x+2}{x^2+k} = \infty$ (dove il segno dipende dal segno del numeratore) quindi anche $x = \pm\sqrt{-k}$ sono punti di discontinuità di II specie.
- Se $k = -4$ il denominatore della funzione è divisibile per il numeratore. Abbiamo infatti:

  $f(x) = \dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)}$. Calcoliamo i limiti per $x \to \pm 2$:

  $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)} = -\dfrac{1}{4} \to x = -2$ è un punto di discontinuità di III specie o eliminabile;

  $\lim\limits_{x \to +2^-} \dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)} = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to +2^+} \dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)} = +\infty \to x = 2$ è un punto di discontinuità di II specie.

---

2 Consideriamo le condizioni date dal problema ed esprimiamole in funzione dei parametri a, b e c.

- $f(1) = 1 \to \dfrac{a+1+b}{c+4} = 1 \to a + b + 1 = c + 4 \to a + b - c - 3 = 0$, con $c \neq -4$.
- La retta $x = 2$ è asintoto verticale per la funzione:

  $$\lim_{x \to 2} f(x) = \infty \to \lim_{x \to 2} \frac{ax^2 + x + b}{cx + 4} = \infty \to \lim_{x \to 2} (cx + 4) = 0 \to 2c + 4 = 0 \to c = -2.$$
- La retta $x + 2y + 3 = 0$ ossia $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$ è asintoto obliquo per la funzione:

  $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{2} \to \lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax^2 + x + b}{x(cx+4)} = -\frac{1}{2} \to \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2\left(a + \frac{1}{x} + \frac{b}{x^2}\right)}{x^2\left(c + \frac{4}{x}\right)} = -\frac{1}{2} \to \frac{a}{c} = -\frac{1}{2};$$

  $$\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) + \frac{1}{2}x\right] = -\frac{3}{2} \to \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{ax^2 + x + b}{cx + 4} + \frac{1}{2}x\right] = -\frac{3}{2} \to$$

  $$\to \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2ax^2 + 2x + 2b + cx^2 + 4x}{2(cx+4)} = -\frac{3}{2} \to \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(2a+c)x^2 + 6x + 2b}{2cx + 8} = -\frac{3}{2} \to$$

  $$\to \begin{cases} 2a + c = 0 \\ \dfrac{6}{2c} = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \to \begin{cases} 2a + c = 0 \\ c = -2 \end{cases}$$

In definitiva abbiamo

$$\begin{cases} a+b-c-3=0 \\ c=-2 \\ \dfrac{a}{c}=-\dfrac{1}{2} \\ 2a+c=0 \\ c=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=1 \\ c=-2 \end{cases}$$

La funzione cercata è quindi $f(x)=\dfrac{x^2+x}{-2x+4}$.

3 **a)** Perché la funzione soddisfi le ipotesi del teorema di Weierstrass nell'intervallo [0; 4] dobbiamo imporre che, in tale intervallo, $f(x)$ sia continua.

Studiamo pertanto la continuità di $f(x)=\begin{cases} c-x^2 & \text{se } x<2 \\ x^2-cx+1 & \text{se } x\geq 2 \end{cases}$.

Le funzioni polinomiali che definiscono $f(x)$ sono continue in tutto l'asse reale, imponiamo quindi che $f(x)$ sia continua anche nel punto di raccordo. Calcoliamo i limiti:

$$\lim_{x\to 2^-}(c-x^2)=c-4;$$

$$\lim_{x\to 2^+}(x^2-cx+1)=4-2c+1=5-2c.$$

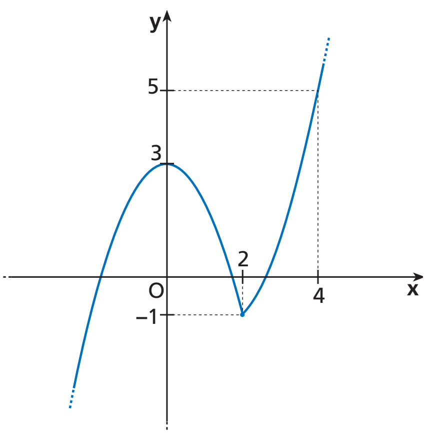
Deve quindi essere:

$$c-4=5-2c \rightarrow 3c=9 \rightarrow c=3.$$

b) Sostituendo il valore del parametro nell'equazione della funzione otteniamo:

$$f(x)=\begin{cases} 3-x^2 & \text{se } x<2 \\ x^2-3x+1 & \text{se } x\geq 2 \end{cases}$$

Tracciamo il grafico costituito da due rami di parabola.



c) Deduciamo il massimo e il minimo della funzione, la cui esistenza è assicurata dal teorema di Weierstrass, nell'intervallo [0; 4], dal grafico della funzione.
Il massimo è nell'estremo $x=4$ dove la funzione vale $f(4)=16-12+1=5$; il minimo è nel punto di raccordo $x=2$ dove la funzione vale $f(2)=-1$.

4 Calcoliamo il limite $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}\ln^2 x^2$.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $0\cdot\infty$. Scriviamo la funzione in altro modo:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}\ln^2 x^2=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x^2}{e^x}\right)^2=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x^2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{e^x}\right)^2=0$$

perché, per la gerarchia degli infiniti, abbiamo $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x^2}{x^2}=0$ e $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$.