Risoluzione della verifica IN UN'ORA - PRIMA PROVA

1 **a)** Studiamo i punti di discontinuità di $f(x) = \dfrac{1+x^3}{1-|x|} = \begin{cases} \dfrac{1+x^3}{1+x} & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{1+x^3}{1-x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

Il dominio di f è $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$.
Dobbiamo quindi studiare il comportamento della funzione nel punto di raccordo $x = 0$ e intorno ai punti $x = \pm 1$.
Calcoliamo i limiti:

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1+x^3}{1+x} = 1$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1+x^3}{1-x} = 1$ e poiché $f(0) = 1$ la funzione è continua in $x = 0$.
- $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1+x^3}{1+x} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(1+x)(1+x^2-x)}{1+x} = 3 \to$ il limite della funzione esiste e ha valore finito in $x = -1$

  ma la funzione non è ivi definita, quindi il punto è una discontinuità di III specie o eliminabile.
- $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1+x^3}{1-x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1+x^3}{1-x} = -\infty \to$ il punto $x = 1$ è una discontinuità di II specie.

b) Determiniamo gli eventuali asintoti della funzione.

Dal calcolo delle discontinuità abbiamo che $x = 1$ è asintoto verticale per la funzione.

Calcoliamo $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1+x^3}{1+x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x^3}+1\right)}{x\left(\frac{1}{x}+1\right)} = +\infty; \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1+x^3}{1-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x^3}+1\right)}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)} = +\infty.$$

Quindi non esistono asintoti orizzontali. Vediamo se eventualmente esistono asintoti obliqui.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1+x^3}{x(1+x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x^3}+1\right)}{x^2\left(\frac{1}{x}+1\right)} = -\infty; \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1+x^3}{x(1-x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x^3}+1\right)}{x^2\left(\frac{1}{x}-1\right)} = +\infty.$$

Non esistono asintoti obliqui.

---

2 **a)** Determiniamo a in modo che $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{ax^2+(1-3a)x-3} = 1$.

Osserviamo che per ogni a reale, il limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$. Pertanto sia il numeratore che il denominatore sono divisibili per $x-3$.

Scomponiamo il polinomio al numeratore nel seguente modo:

$$x^2-4x+3 = (x-3)(x-1)$$

e utilizziamo il teorema di Ruffini per il polinomio al denominatore:

$$ax^2+(1-3a)x-3 = (x-3)(ax+1).$$

Riscriviamo il limite e calcoliamolo.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-4x+3}{ax^2+(1-3a)x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(ax+1)} = \lim_{x \to 3} \frac{x-1}{ax+1} = \frac{2}{3a+1}.$$

Determiniamo ora a in modo che il limite sia 1:

$$\frac{2}{3a+1} = 1 \to 2 = 3a + 1 \to a = \frac{1}{3}.$$

b) Determiniamo a in modo che la funzione abbia come asintoto verticale la retta $x = -4$.

Deve essere $\lim_{x \to -4} f(x) = \infty$ quindi dobbiamo imporre che -4 sia uno zero del denominatore.

Essendo $f(x) = \dfrac{x-1}{ax+1} \wedge x \neq 3$, abbiamo $-4a + 1 = 0 \to a = \dfrac{1}{4}$.

Verifichiamo che per $a = \dfrac{1}{4}$ il limite sia infinito:

$$\lim_{x \to -4} f(x) = \lim_{x \to -4} \frac{x-1}{\frac{1}{4}x + 1} = \infty.$$

c) Determiniamo a in modo che la funzione intersechi almeno una volta l'asse x.

Poiché $f(x) = \dfrac{x-1}{ax+1} \wedge x \neq 3$, l'unico zero possibile è $x = 1$. Dobbiamo però imporre che $x = 1$ appartenga al dominio di $f(x)$ e cioè che non annulli il denominatore: $a + 1 \neq 0 \to a \neq -1$.

---

3 **a)** Determiniamo il dominio di $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-4}{1-x}} - |x|$.

$$\frac{2x-4}{1-x} \geq 0 \to \begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases} \to \begin{cases} x \geq 2 \\ x < 1 \end{cases} \to 1 < x \leq 2.$$

x		1		2	
2x − 4	−		−	0	+
1 − x	+	0	−		−
$\frac{2x-4}{1-x}$	−	∄	+	0	−

Quindi il dominio della funzione è l'intervallo $]1; 2]$.

b) Per stabilire se c'è uno zero della funzione interno all'intervallo $\left[\dfrac{6}{5}; \dfrac{9}{5}\right]$, utilizziamo il teorema degli zeri: la funzione è continua nell'intervallo considerato e inoltre:

$$f\left(\frac{6}{5}\right) = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{6}{5} - 4}{1 - \frac{6}{5}}} - \left|\frac{6}{5}\right| = \sqrt{\frac{-\frac{8}{5}}{-\frac{1}{5}}} - \frac{6}{5} = 2\sqrt{2} - \frac{6}{5} > 0,$$

$$f\left(\frac{9}{5}\right) = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{9}{5} - 4}{1 - \frac{9}{5}}} - \left|\frac{9}{5}\right| = \sqrt{\frac{-\frac{2}{5}}{-\frac{4}{5}}} - \frac{9}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{9}{5} < 0.$$

La funzione assume agli estremi dell'intervallo valori di segno opposto quindi, per il teorema degli zeri, esiste almeno un punto interno all'intervallo in cui la funzione si annulla.

c) Per stabilire se l'equazione $f(x) = -1$, o equivalentemente $f(x) + 1 = 0$, ammette una soluzione nell'intervallo $\left[\dfrac{3}{2}; \dfrac{9}{5}\right]$, applichiamo il teorema degli zeri alla funzione $g(x) = f(x) + 1$.

g ha lo stesso dominio di f quindi è continua nell'intervallo $\left[\dfrac{3}{2}; \dfrac{9}{5}\right] \subseteq]1; 2]$. Inoltre è:

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{3}{2} - 4}{1 - \frac{3}{2}}} - \left|\frac{3}{2}\right| + 1 = \sqrt{\frac{-1}{-\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2} + 1 = \sqrt{2} - \frac{3}{2} + 1 > 0,$$

$$g\left(\frac{9}{5}\right) = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{9}{5} - 4}{1 - \frac{9}{5}}} - \left|\frac{9}{5}\right| + 1 = \sqrt{\frac{-\frac{2}{5}}{-\frac{4}{5}}} - \frac{9}{5} + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{9}{5} + 1 < 0.$$

Per il teorema degli zeri, g ammette almeno uno zero nell'intervallo $\left[\frac{3}{2}; \frac{9}{5}\right]$, quindi l'equazione $f(x) = -1$ ammette almeno una soluzione.

---

4 Osserviamo inizialmente che se $a = 0$, allora $f(x) = \ln\frac{4x - a}{8 + ax} = \ln\frac{x}{2}$ e $x = 1$ non è punto di discontinuità per la funzione.

Studiamo, al variare di $a \neq 0$, il dominio di $f(x) = \ln\frac{4x - a}{8 + ax}$.

$$\frac{4x - a}{8 + ax} > 0 \to \begin{cases} 4x - a > 0 \\ 8 + ax > 0 \end{cases} \to \begin{cases} x > \frac{a}{4} \\ ax > -8 \end{cases}$$

Distinguiamo due casi a seconda del segno di a.

- Se $a < 0$, allora $\begin{cases} x > \frac{a}{4} \\ ax > -8 \end{cases} \to \begin{cases} x > \frac{a}{4} \\ x < -\frac{8}{a} \end{cases} \to \frac{a}{4} < x < -\frac{8}{a}$.
- Se $a > 0$, allora $\begin{cases} x > \frac{a}{4} \\ ax > -8 \end{cases} \to \begin{cases} x > \frac{a}{4} \\ x > -\frac{8}{a} \end{cases} \to x > \frac{a}{4}$.

Affinché $f(x) = \ln\frac{4x - a}{8 + ax}$ abbia una discontinuità di II specie in $x = 1$ deve accadere che 1 non appartenga al dominio della funzione ma sia punto di accumulazione di f, e che il limite per $x \to 1$, da destra o da sinistra, sia infinito oppure non esista.

I punti che non appartengono al dominio della funzione ma che sono di accumulazione per f sono $x = \frac{a}{4}$ e $x = -\frac{8}{a}$.

Quindi, perché $x = 1$ sia punto di accumulazione per f, abbiamo due possibilità:

- $\frac{a}{4} = 1 \to a = 4$;
- $-\frac{8}{a} = 1 \to a = -8$.

Consideriamo ora le due funzioni per i valori di a trovati e calcoliamo i limiti per $x \to 1$.

- Se $a = 4$: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \ln\frac{4x - 4}{8 + 4x} = -\infty$;
- se $a = -8$: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \ln\frac{4x + 8}{8 - 8x} = +\infty$.

In entrambi i casi in $x = 1$ abbiamo una discontinuità di II specie.