Risoluzione della verifica IN UN'ORA - SECONDA PROVA

1 **a)** Imponiamo le condizioni date dal problema e determiniamo i parametri a e b.

$$f(0) = 2 \to a^{0+1} = 2 \to a = 2,$$

$$\lim_{x \to \pi^+} f(x) = +\infty \to \lim_{x \to \pi^+} \ln \frac{1}{x-b} = +\infty \to \lim_{x \to \pi^+} \frac{1}{x-b} = +\infty \to \lim_{x \to \pi^+} (x-b) = 0 \to b = \pi.$$

Quindi la funzione è così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} & \text{se } x \le 0 \\ \operatorname{cotg} x & \text{se } 0 < x < \pi \\ \ln \dfrac{1}{x-\pi} & \text{se } x > \pi \end{cases}$$

b) Per studiare il dominio di $f(x)$, studiamo il dominio delle singole funzioni che la compongono:

- la funzione $y = 2^{x-1}$ è definita per ogni reale;
- il dominio di $y = \operatorname{cotg} x$ è $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e l'intervallo in cui si considera la funzione è compreso nel dominio;
- il dominio di $y = \ln \frac{1}{x-\pi}$ è $\frac{1}{x-\pi} > 0 \to x > \pi$.

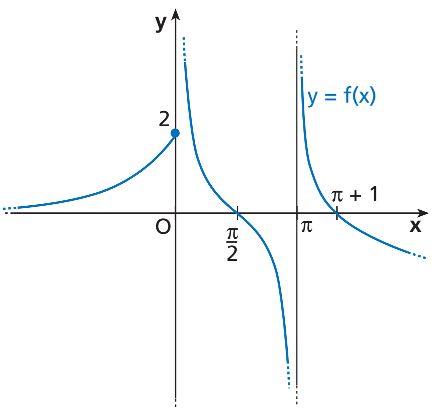
In definitiva il dominio della funzione è $\mathbb{R} - \{\pi\}$.

Studiamo il segno della funzione.

- $2^{x-1} > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \to f(x) > 0$ in $x \le 0$.
- $\operatorname{cotg} x > 0$ se $0 + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, quindi nel dominio considerato abbiamo che $f(x)$ è positiva se $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e negativa se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.
- $\ln \frac{1}{x-\pi} > 0$ se $\frac{1}{x-\pi} > 1 \to x - \pi < 1 \to x < 1 + \pi$, quindi nel dominio considerato abbiamo che $f(x)$ è negativa se $x > 1 + \pi$, positiva se $\pi < x < 1 + \pi$.

  In definitiva la funzione è positiva negli intervalli $\left]-\infty; \frac{\pi}{2}\right[\cup]\pi; \pi + 1[$ e negativa altrimenti.

Sfruttiamo le proprietà delle trasformazioni geometriche per disegnare il grafico di $y = f(x)$.



c) Dal grafico deduciamo i limiti richiesti.

- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \to \pi^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Per verificare che $\lim_{x \to \pi^-} f(x) = -\infty$ dobbiamo dimostrare che, fissato un reale $M > 0$, arbitrariamente grande, esiste un intorno sinistro di π in cui la disuguaglianza $f(x) < -M$ è verificata per ogni x di questo intorno.
In un intorno sinistro di π la funzione è definita da $f(x) = \operatorname{cotg} x$, quindi abbiamo:

$$f(x) < -M \to \operatorname{cotg} x < -M \to \operatorname{arccotg}(-M) + k\pi < x < \pi + k\pi.$$

Poiché l'intervallo $]\operatorname{arccotg}(-M); \pi[$ è un intorno sinistro di π, il limite è verificato.
Per verificare che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ dobbiamo dimostrare che, fissato un reale $M > 0$, arbitrariamente grande, esiste un intorno di $+\infty$ in cui la disuguaglianza $f(x) < -M$ è verificata per ogni x dell'intorno.

In un intorno di $+\infty$ la funzione è definita $f(x) = \ln \frac{1}{x - \pi}$, quindi abbiamo:

$$f(x) < -M \to \ln \frac{1}{x-\pi} < -M \to \frac{1}{x-\pi} < e^{-M}.$$

Passando ai reciproci otteniamo $x - \pi > e^M$ cioè l'intervallo $x > e^M + \pi$ che è proprio un intorno di $+\infty$. Quindi il limite è verificato.

---

2 Condizione necessaria perché possiamo calcolare il limite di una funzione in un punto α di $\mathbb{R}$ è che α sia un punto di accumulazione per la funzione. Non è detto che un punto di accumulazione appartenga al dominio, quindi, per entrambi i limiti, non è corretto affermare che π appartiene necessariamente al dominio.

---

3 **a)** Calcoliamo il limite $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{1-e^{2x}}$ che si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{1-e^{2x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{3x} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{-2x}{e^{2x}-1} = -\frac{3}{2},$$

dove abbiamo utilizzato i limiti notevoli $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ e $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

b) Calcoliamo il limite $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 - 6x^2}{2x^3 + x^2 - 8x - 4}$ che si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 - 6x^2}{2x^3 + x^2 - 8x - 4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3\left(3 - \frac{6}{x}\right)}{x^3\left(2 + \frac{1}{x} - \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)} = \frac{3}{2}.$$

c) Calcoliamo il limite $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^x$ che si presenta nella forma indeterminata 1^∞.

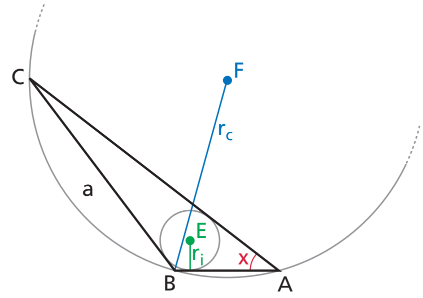
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}\right]^x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[\left(1 + \frac{1}{-x^2}\right)^{-x^2}\right]^{\frac{-1}{x}}}{\left[\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{1}{x}}} = 1,$$

dove abbiamo usato il limite notevole $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

---

4 Rappresentiamo il triangolo e determiniamo le limitazioni per x. Deve essere:

$$x + 3x < \pi \to 4x < \pi \to x < \frac{\pi}{4}, \text{ dunque } x \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[.$$



Troviamo il raggio r_c della circonferenza circoscritta con il teorema della corda:

$$\overline{BC} = 2r_c \operatorname{sen} B\widehat{A}C \to r_c = \frac{a}{2 \operatorname{sen} x}.$$

Calcoliamo poi il raggio r_i della circonferenza inscritta con la formula $r_i = \frac{S}{p}$, dove S rappresenta l'area del triangolo e p il semiperimetro.

Applichiamo il teorema dei seni per trovare le misure di AC e AB.

$$\frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen} C\widehat{B}A} = \frac{\overline{CB}}{\operatorname{sen} C\widehat{A}B} \to \frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen} 3x} = \frac{a}{\operatorname{sen} x} \to \overline{AC} = a\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x}.$$

$$\frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen} B\widehat{C}A} = \frac{\overline{CB}}{\operatorname{sen} C\widehat{A}B} \to \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}(\pi - 4x)} = \frac{a}{\operatorname{sen} x} \to \overline{AB} = a\frac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} x}.$$

L'area del triangolo è $S = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\cdot\overline{BC}\operatorname{sen} C\widehat{B}A$, dunque $S = \frac{1}{2}a\frac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} x}\cdot a\operatorname{sen} 3x \to S = \frac{1}{2}a^2\frac{\operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x}$.

Il semiperimetro è:

$$p = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AB} + \overline{CA}) \to p = \frac{1}{2}\left(a + a\frac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} x} + a\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x}\right) \to p = \frac{a}{2\operatorname{sen} x}(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 3x).$$

Quindi abbiamo:

$$r_i = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}a^2\frac{\operatorname{sen} 4x\cdot\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{a}{2\operatorname{sen} x}(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x)} = a\cdot\frac{\operatorname{sen} 4x\cdot\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x}.$$

Calcoliamo ora i limiti richiesti.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} r_c = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{a}{2\operatorname{sen} x} = +\infty.$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} r_i = \lim\limits_{x\to 0^+} a\frac{\operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x} = \lim\limits_{x\to 0^+} a\frac{4x\frac{\operatorname{sen} 4x}{4x}\cdot 3x\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}}{x\frac{\operatorname{sen} x}{x} + 3x\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} + 4x\frac{\operatorname{sen} 4x}{4x}} =$

  $= \lim\limits_{x\to 0^+} a\frac{12x\frac{\operatorname{sen} 4x}{4x}\cdot\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{x} + 3\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} + 4\frac{\operatorname{sen} 4x}{4x}}.$

  Applichiamo il limite notevole $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e otteniamo come risultato 0.

- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{r_i}{r_c} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{a\frac{\operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x}}{\frac{a}{2\operatorname{sen} x}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} 2\frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x} = 0.$