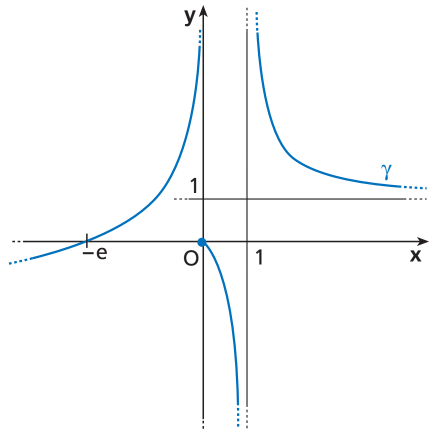
Risoluzione della verifica IN UN'ORA - PRIMA PROVA

1 **a)** Rappresentiamo il grafico γ di $y = f(x) = \begin{cases} 1 - \ln(-x) & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{x}{x-1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

Disegniamo la prima funzione applicando le trasformazioni geometriche a partire da $y = \ln x$. In successione otteniamo il grafico di $y = \ln(-x)$ con una simmetria rispetto all'asse y, poi quello di $y = -\ln(-x)$ con una simmetria rispetto all'asse x e infine quello di $y = 1 - \ln(-x)$ con una traslazione di vettore $(0; 1)$.
Osserviamo poi che la seconda funzione è una funzione omografica di asintoti $x = 1$, $y = 1$.

Dal grafico deduciamo i limiti richiesti.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$



b) Per verificare che $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, dobbiamo dimostrare che fissato un reale $\varepsilon > 0$, arbitrariamente piccolo, esiste un intorno di $+\infty$ in cui la disuguaglianza $|f(x) - 1| < \varepsilon$ è verificata per ogni x dell'intorno.

In un intorno di $+\infty$ la funzione è definita da $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, quindi abbiamo:

$$|f(x) - 1| < \varepsilon \to \left|\frac{x}{x-1} - 1\right| < \varepsilon \to \left|\frac{1}{x-1}\right| < \varepsilon.$$

Passando ai reciproci otteniamo:

$$|x - 1| > \frac{1}{\varepsilon} \to x - 1 < -\frac{1}{\varepsilon} \vee x - 1 > \frac{1}{\varepsilon} \to x < 1 - \frac{1}{\varepsilon} \vee x > 1 + \frac{1}{\varepsilon}.$$

Poiché l'intervallo $x > 1 + \dfrac{1}{\varepsilon}$ è un intorno di $+\infty$, il limite è verificato.

Per verificare che $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$, dobbiamo dimostrare che fissato un reale $M > 0$, arbitrariamente grande, esiste un intorno sinistro di 0 in cui la disuguaglianza $f(x) > M$ è verificata per ogni x dell'intorno.

In un intorno, arbitrariamente piccolo, di 0^- la funzione è definita da $1 - \ln(-x)$, quindi abbiamo:

$$f(x) > M \to 1 - \ln(-x) > M \to \ln(-x) < 1 - M \to -x < e^{1-M} \to x > -e^{1-M}.$$

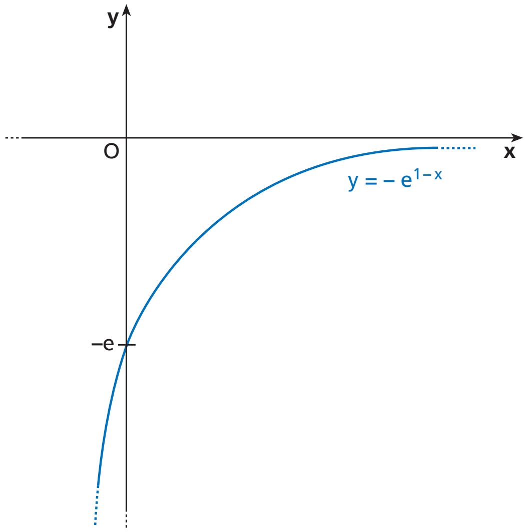
Mettendo a sistema la disuguaglianza $x > -e^{1-M}$ con il dominio della funzione $x < 0$ otteniamo $-e^{1-M} < x < 0$, cioè un intorno sinistro di 0.
Quindi il limite è verificato.

c) Consideriamo $y = 1 - \ln(-x)$ nel dominio $x < 0$ e ricaviamo x in funzione di y.

$$y = 1 - \ln(-x) \to \ln(-x) = 1 - y \to -x = e^{1-y} \to x = -e^{1-y}.$$

Scambiando x con y otteniamo l'equazione della funzione inversa: $y = -e^{1-x}$.

Rappresentiamo il suo grafico effettuando una simmetria di $f(x)$ rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.



Dal grafico deduciamo che $\lim_{x \to +\infty} (-e^{1-x}) = 0$.

---

2 Dobbiamo provare che per ogni reale $\varepsilon > 0$, arbitrariamente piccolo, esiste un intorno di x_0 in cui la disuguaglianza $\left| \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} l \right| < \varepsilon$ è verificata per ogni x dell'intorno.

Sappiamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, cioè per ogni reale $\varepsilon' > 0$ arbitrariamente piccolo, esiste un intorno di x_0 in cui la disuguaglianza $| f(x) - l | < \varepsilon'$ è verificata per ogni x dell'intorno.

Poiché ε' è arbitrario, possiamo scegliere $\varepsilon' = 2\varepsilon$ e otteniamo che esiste un intorno di x_0 in cui è verificata la disuguaglianza:

$$| f(x) - l | < \varepsilon' = 2\varepsilon.$$

Allora, nello stesso intorno, abbiamo:

$$| f(x) - l | < 2\varepsilon \to \frac{1}{2} | f(x) - l | < \varepsilon \to \left| \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} l \right| < \varepsilon.$$

Il limite è, quindi, verificato.

---

3 **a)** Calcoliamo il limite $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{|\operatorname{sen} x|}}$ considerando separatamente i casi: $x \to 0^+$ e $x \to 0^-$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sqrt{|\operatorname{sen} x|}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{x^2}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x \cdot \frac{x}{\operatorname{sen} x}} = 0,$$

dove abbiamo usato il limite notevole $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{\sqrt{|\operatorname{sen} x|}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{\sqrt{-\operatorname{sen} x}} = \lim_{x \to 0^-} \left(-\sqrt{\frac{x^2}{-\operatorname{sen} x}} \right) = \lim_{x \to 0^-} \left(-\sqrt{-x \cdot \frac{x}{\operatorname{sen} x}} \right) = 0.$$

Ne segue che esiste e vale 0 anche il limite $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{|\operatorname{sen} x|}}$.

b) Calcoliamo il limite $\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Sostituiamo $t = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} \to x = \frac{1}{\operatorname{tg} t}$ con $t \to 0$, e calcoliamo:

$$\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\operatorname{tg} t}\cdot t = \lim_{t\to 0} \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}\cdot t = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\operatorname{sen} t}\cdot \cos t = 1.$$

c) Calcoliamo il limite $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1}$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-2x+2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})} = \lim_{x\to 1} \frac{-2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}} = -\frac{1}{2}.$$

---

4 Discutiamo il $\lim_{x\to 0^+} \frac{kx^k+x}{x^2+x}$, al variare di k in $\mathbb{R}$.

- Se $k<0 \to \lim_{x\to 0^+} \frac{kx^k+x}{x^2+x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{k}{x^{-k}}+x}{x^2+x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{k+x^{1-k}}{x^{-k}(x^2+x)}$.

  Essendo $k<0$, il numeratore tende a un numero negativo mentre il denominatore tende a 0^+, perciò il risultato del limite è $-\infty$.

- Se $k=0 \to \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^2+x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$.

- Se $0<k<1 \to \lim_{x\to 0^+} \frac{kx^k+x}{x^2+x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^k(k+x^{1-k})}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{k+x^{1-k}}{x^{1-k}(x+1)} = +\infty$, perché al denominatore il termine x^{1-k} tende a 0^+ (in quanto $1-k>0$) e il numeratore è positivo.

- Se $k=1 \to \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{x^2+x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x+1} = 2$.

- Se $k>1 \to \lim_{x\to 0^+} \frac{kx^k+x}{x^2+x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(kx^{k-1}+1)}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{kx^{k-1}+1}{x+1} = 1$.