Risoluzione dei problemi

1 **a)** f rappresenta un fascio di funzioni omografiche, al variare del parametro a in $\mathbb{R}$, se si verifica la condizione:

$$a \cdot (-a) + 4 \neq 0 \rightarrow a \neq \pm 2.$$

Se $a \neq \pm 2$ il grafico rappresenta iperboli equilatere di asintoti le rette di equazioni $x = a$ e $y = a$ e aventi il centro di simmetria nel punto $O'(a; a)$.
Il dominio è costituito da tutti i numeri reali $x \neq a$ e, in $x = a$, le funzioni presentano un punto di discontinuità di seconda specie.

Se $a = 2 \rightarrow f_1(x) = \dfrac{2x-4}{x-2} = \dfrac{2(x-2)}{x-2} = 2 \wedge x \neq 2;$

Se $a = -2 \rightarrow f_2(x) = \dfrac{-2x-4}{x+2} = \dfrac{-2(x+2)}{x+2} = -2 \wedge x \neq -2.$

Il grafico di ciascuna di queste due funzioni è una retta alla quale occorre togliere un punto, rispettivamente $(2; 2)$ per la prima funzione e $(-2; -2)$ per la seconda.
Pertanto, $x = 2$ e $x = -2$ sono, rispettivamente, punti di discontinuità di terza specie.

b) Se $a = 3$ otteniamo la funzione omografica $f(x) = \dfrac{3x-4}{x-3}$ il cui dominio è $\mathbb{R} - \{3\}$.

Per controllare se l'equazione $f(x) = p(x)$ ammette soluzioni nell'intervallo $[-1; 0]$, possiamo applicare il teorema degli zeri alla funzione $h(x) = f(x) - p(x)$.

$$h(x) = \frac{3x-4}{x-3} - (x^2 - x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 4}{3-x}.$$

La funzione è continua in $[-1; 0]$ e inoltre si ha:

$$h(-1) = -\frac{1}{4} < 0;$$

$$h(0) = \frac{4}{3} > 0.$$

Nell'intervallo $[-1; 0]$ sono soddisfatte le ipotesi del teorema degli zeri, pertanto esiste almeno una radice dell'equazione $h(x) = 0$.

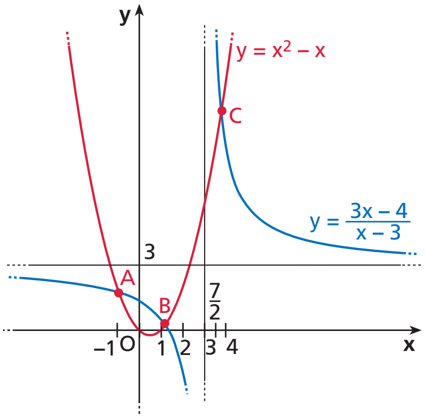
In modo analogo procediamo per gli intervalli $[1; 2]$ e $\left[\dfrac{7}{2}; 4\right]$, verificando che anche in questi intervalli la funzione $h(x)$ ammette almeno una radice.
Abbiamo infatti:

$$h(1) = \frac{1}{2}, \qquad h(2) = -4;$$

$$h\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{17}{4}, \qquad h(4) = -4.$$

Rappresentiamo nello stesso sistema di assi cartesiani i grafici delle funzioni $f(x) = \dfrac{3x-4}{x-3}$ e $p(x) = x^2 - x$.

I grafici delle funzioni $f(x)$ e $p(x)$ si incontrano in tre punti: A di ascissa appartenente all'intervallo $]-1; 0[$, B di ascissa appartenente all'intervallo $]1; 2[$ e C di ascissa appartenente all'intervallo $\left]\dfrac{7}{2}; 4\right[$.



c) Se $a = 1$, otteniamo la funzione omografica $f(x) = \dfrac{x-4}{x-1}$.

$f(4) = 0$ e quindi, per dimostrare che $f(x)$ è continua nel punto $x = 4$, dobbiamo dimostrare che $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = f(4)$.

Applicando la definizione di limite, dobbiamo verificare che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intorno I (dipendente da ε) del punto $x = 4$, tale che, per ogni $x \in I$, si abbia $|f(x) - f(4)| < \varepsilon$.

Risolvendo quest'ultima disequazione otteniamo:

$$\left|\frac{x-4}{x-1} - 0\right| < \varepsilon \to \left|\frac{x-4}{x-1}\right| < \varepsilon \to -\varepsilon < \frac{x-4}{x-1} < \varepsilon \to \begin{cases} \dfrac{x-4}{x-1} < \varepsilon \\ \dfrac{x-4}{x-1} > -\varepsilon \end{cases}$$

Poiché $x \to 4$, possiamo supporre che $x - 1 > 0$. Moltiplicando entrambe le disequazioni per $x - 1$, otteniamo:

$$\begin{cases} x-4 < \varepsilon(x-1) \\ x-4 > -\varepsilon(x-1) \end{cases} \to \begin{cases} x - \varepsilon x < 4 - \varepsilon \\ x + \varepsilon x > 4 + \varepsilon \end{cases} \to \begin{cases} (1-\varepsilon)x < 4 - \varepsilon \\ (1+\varepsilon)x > 4 + \varepsilon \end{cases} \to \begin{cases} x < \dfrac{4-\varepsilon}{1-\varepsilon} \\ x > \dfrac{4+\varepsilon}{1+\varepsilon} \end{cases}$$

Le soluzioni trovate formano l'intervallo aperto $\left]\dfrac{4+\varepsilon}{1+\varepsilon}; \dfrac{4-\varepsilon}{1-\varepsilon}\right[$, che costituisce un intorno di $x = 4$, essendo $\dfrac{4-\varepsilon}{1-\varepsilon} > 4$ e $\dfrac{4+\varepsilon}{1+\varepsilon} < 4$.

Concludiamo che la funzione è continua nel punto $x = 4$.

d) Se $a = 1$, otteniamo $g(x) = \sqrt{\dfrac{x-4}{x-1}}$.

Il dominio di $g(x)$ è:

$$\begin{cases} \dfrac{x-4}{x-1} \geq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \to x < 1 \vee x \geq 4.$$

Il dominio è dunque l'unione di due intervalli:

$D =]-\infty; 1[\cup [4; +\infty[$.

Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

- $\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{\dfrac{x-4}{x-1}} = +\infty \to$ la retta di equazione $x = 1$ è asintoto verticale sinistro;
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt{\dfrac{x-4}{x-1}} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt{\dfrac{1 - \dfrac{4}{x}}{1 - \dfrac{1}{x}}} = 1 \to$ la retta di equazione $y = 1$ è asintoto orizzontale;

- $\lim_{x \to 4^+} \sqrt{\dfrac{x-4}{x-1}} = 0.$

2 **a)** Riscriviamo $f(x) = ax + b + \dfrac{x^2}{x+1}$ nel seguente modo:

$$f(x) = \frac{(ax+b)(x+1)+x^2}{x+1} = \frac{ax^2+ax+bx+b+x^2}{x+1} = \frac{(a+1)x^2+(a+b)x+b}{x+1}.$$

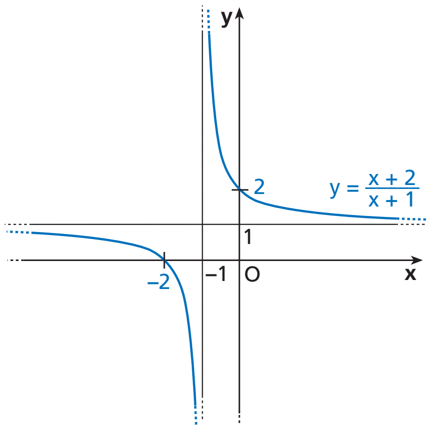
Imponiamo la condizione sul limite e determiniamo i coefficienti.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \to \begin{cases} a+1=0 \\ a+b=1 \end{cases} \to \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$$

Sostituendo i valori trovati otteniamo:

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1},$$

che rappresenta una funzione omografica, ossia un'iperbole equilatera di asintoti le rette di equazione $x = -1$ e $y = 1$.
Tracciamo il grafico di $f(x)$.



b) Verifichiamo che $f(x)$ è continua nel punto $x = 0$ con il limite:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0).$$

Poiché $f(0) = 2$, dobbiamo verificare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno I (dipendente da ε) del punto $x = 0$ tale che, per ogni $x \in I$, si abbia: $|f(x) - 2| < \varepsilon$.

Risolvendo quest'ultima disequazione otteniamo:

$$\left|\frac{x+2}{x+1} - 2\right| < \varepsilon \to \left|\frac{x+2-2x-2}{x+1}\right| < \varepsilon \to \left|\frac{-x}{x+1}\right| < \varepsilon \to$$

$$\to \left|\frac{x}{x+1}\right| < \varepsilon \to -\varepsilon < \frac{x}{x+1} < \varepsilon \to \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} < \varepsilon \\ \dfrac{x}{x+1} > -\varepsilon \end{cases}$$

Poiché $x \to 0$, possiamo supporre che $x + 1 > 0$. Moltiplicando entrambe le disequazioni per $x + 1$, otteniamo:

$$\begin{cases} x < \varepsilon(x+1) \\ x > -\varepsilon(x+1) \end{cases} \to \begin{cases} x - \varepsilon x < \varepsilon \\ x + \varepsilon x > -\varepsilon \end{cases} \to \begin{cases} (1-\varepsilon)x < \varepsilon \\ (1+\varepsilon)x > -\varepsilon \end{cases} \to \begin{cases} x < \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \\ x > -\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \end{cases}$$

Le soluzioni trovate formano l'intervallo aperto $\left]-\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}; \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right[$, che costituisce un intorno di $x = 0$.

Concludiamo che la funzione è continua nel punto $x = 0$.

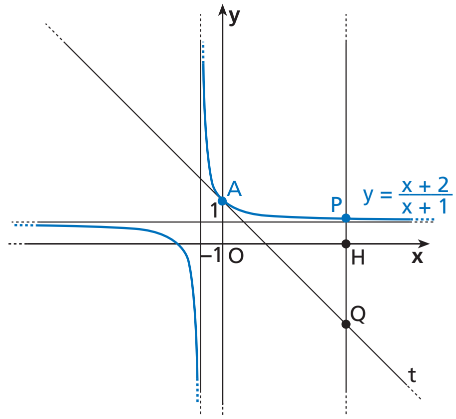
c) Il punto di intersezione tra la curva e l'asse y è $A(0; 2)$.

Mettiamo a sistema l'equazione del fascio di rette di centro il punto $A(0; 2)$ con l'equazione dell'iperbole e poniamo il discriminante dell'equazione risolvente uguale a zero.

$$\begin{cases} y = \dfrac{x+2}{x+1} \\ y = mx + 2 \end{cases} \to \begin{cases} mx + 2 = \dfrac{x+2}{x+1} \\ y = mx + 2 \end{cases} \to \begin{cases} (mx+2)(x+1) = x+2 \\ y = mx+2 \end{cases}$$

L'equazione risolvente del sistema è $mx^2 + (m+1)x = 0$.
Poniamo il discriminante uguale a 0: $\Delta = 0 \to (m+1)^2 = 0 \to m = -1$.
La retta t ha equazione: $y = -x + 2$.

d) Rappresentiamo graficamente il problema.



Consideriamo un punto P appartenente all'arco del grafico di $f(x)$, con $x > -1$. Chiamiamo H la proiezione di P sull'asse x e sia Q il punto in cui la parallela all'asse y per P interseca la retta t. I punti P, H e Q hanno coordinate:

$$P\left(x; \frac{x+2}{x+1}\right), H(x; 0), Q(x; -x+2).$$

Abbiamo: $\overline{HP} = \left|\frac{x+2}{x+1}\right|$ e $\overline{HQ} = |-x+2| = |x-2|$.

Inoltre se $P \to A$ si ha $x \to 0$, quindi:

$$\lim_{P \to A} \frac{\overline{HP}}{\overline{HQ}} = \lim_{x \to 0} \frac{\left|\frac{x+2}{x+1}\right|}{|x-2|} = 1.$$

Risoluzione dei quesiti

1 **a)** Calcoliamo $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Moltiplicando il numeratore e il denominatore per $1 + \sqrt{\cos x}$, otteniamo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})}{x^2(1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2(1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\cos x}}.$$

Applichiamo il limite notevole $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ e otteniamo come risultato $\frac{1}{4}$.

b) Calcoliamo $\lim_{x \to +\infty} (x-1)[\ln(x+1) - \ln x]$.

Riscriviamo il limite nel seguente modo:

$$\lim_{x \to +\infty} (x-1) \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$$

Utilizziamo il limite notevole $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ e otteniamo come risultato $\ln e = 1$.

---

2 Il dominio della funzione $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x+1}}$ è $\mathbb{R} - \{-1\}$ e quindi è illimitato sia superiormente che inferiormente. Possiamo pertanto calcolare i limiti della funzione per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

Poiché $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x+1}} = 1$, si ha $\lim_{x \to +\infty} (x-1)e^{\frac{1}{x+1}} = +\infty$. Esiste pertanto la condizione necessaria, ma non sufficiente, per l'esistenza di un eventuale asintoto obliquo.

Calcoliamo $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, otteniamo: $\lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)e^{\frac{1}{x+1}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x+1}} = 1.$

Calcoliamo $q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$, otteniamo: $\lim_{x \to +\infty} \left[(x-1)e^{\frac{1}{x+1}} - x\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1\right)x - e^{\frac{1}{x+1}}\right].$

Il limite $\lim_{x \to +\infty} \left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1\right)x$ è una forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Moltiplichiamo e dividiamo per $\frac{1}{x-1}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1\right)}{\frac{1}{x+1}} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot x = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x+1}} - 1}{\frac{1}{x+1}} \cdot \frac{x}{x+1}.$$

Per il calcolo di $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x+1}} - 1}{\frac{1}{x+1}}$ effettuiamo la sostituzione $\frac{1}{x+1} = t$ e troviamo il limite notevole $\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t}$ che vale 1. Si ha inoltre che $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$, dunque il limite $\lim_{x \to +\infty} \left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1\right)x$ vale 1. Otteniamo allora che $q = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1\right)x - e^{\frac{1}{x+1}}\right] = 0.$

Quindi la retta di equazione $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

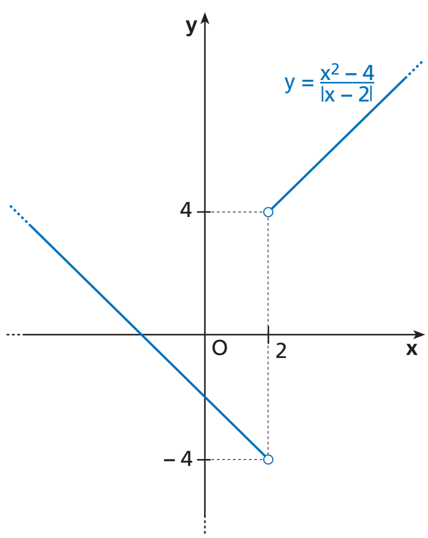
In modo analogo si procede per stabilire che $y = x$ è asintoto obliquo anche per $x \to -\infty$.

3 Il dominio della funzione è $\mathbb{R} - \{2\}$. La funzione è continua nel suo dominio.
Calcoliamo i limiti della funzione, da destra e da sinistra, nel punto $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-4}{|x-2|} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} =$$
$$= \lim_{x \to 2^+} (x+2) = 4;$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-4}{|x-2|} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-4}{2-x} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{2-x} =$$
$$= \lim_{x \to 2^-} -(x+2) = -4.$$

I limiti destro e sinistro esistono finiti, ma diversi tra loro. Quindi il $\lim_{x \to 2} f(x)$ non esiste. Il punto $x = 2$ è un punto di discontinuità di prima specie, con salto uguale a 8.



4 Il numeratore $2 + \cos x$ non ammette limite per $x \to +\infty$ mentre il denominatore ha limite infinito per $x \to +\infty$. Per calcolare questo limite non possiamo pertanto utilizzare il teorema del limite del quoziente.

Il numeratore è una funzione limitata: $-1 \leq \cos x \leq 1$ da cui $1 \leq 2 + \cos x \leq 3$.
Poiché $x \to +\infty$, possiamo supporre $x > 0$ e quindi:

$$\frac{1}{x} \leq \frac{2 + \cos x}{x} \leq \frac{3}{x}.$$

Poiché $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0$, utilizzando il teorema del confronto, otteniamo $\lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \cos x}{x} = 0.$

5 Il dominio di $f(x)$ è $\mathbb{R} - \{-1, 3\}$.

Osserviamo che

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-3)} \text{ e se } x \neq -1, \text{ allora } f(x) = \frac{x-2}{x-3}.$$

f è continua nel suo dominio, analizziamo quindi i punti di ascissa $x = -1$ e $x = 3$.

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x-2}{x-3} = \frac{3}{4}.$$

Quindi il punto $x = -1$ è un punto di discontinuità di III specie, o eliminabile, per il grafico della funzione.

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{x-2}{x-3} = +\infty,$$

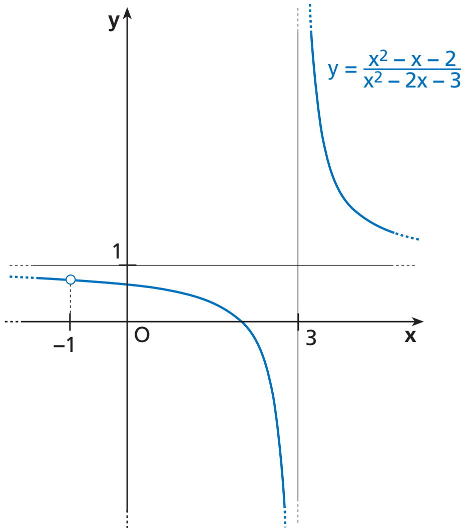
$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{x-2}{x-3} = -\infty.$$

Quindi $x = 3$ è un punto di discontinuità di II specie e la retta di equazione $x = 3$ è asintoto verticale della funzione.

Calcoliamo ora il $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-2}{x-3}$, che si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Poiché il numeratore è un infinito dello stesso ordine del denominatore, abbiamo:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-2}{x-3} = 1.$$

Quindi la retta di equazione $y = 1$ è asintoto orizzontale della funzione.
Il grafico della funzione è un'iperbole equilatera, di asintoti le rette di equazione $x = 3$ e $y = 1$, privata del punto di ascissa $x = -1$.



6 Il grafico di $f(x)$ è l'unione di una semiretta di equazione $y = bx$, se $x < \frac{1}{2}$, e di un arco appartenente alla curva di equazione $y = \log_2 x$, se $x \geq \frac{1}{2}$.

Le funzioni che compongono $f(x)$ sono entrambe continue, quindi affinché la funzione sia continua per ogni x reale deve essere $\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x)$, ossia $\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} bx = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \log_2 x$.

Otteniamo quindi:

$$\frac{b}{2} = \log_2 \frac{1}{2} \to \frac{b}{2} = -1 \to b = -2.$$

Pertanto, l'equazione della funzione è $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ \log_2 x & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

e il suo grafico è rappresentato in figura.