Risoluzione della verifica IN UN'ORA - SECONDA PROVA

1 Calcoliamo la derivata di $F(x) = \int_0^x \frac{t-1}{t^2+1}dt$.

$$F'(x) = \frac{x-1}{x^2+1};\ F'(x) > 0 \to x-1>0 \to x>1.$$

Quindi la funzione è decrescente nell'intervallo $]-\infty; 1[$, crescente in $]1; +\infty[$ e ha in $x=1$ un punto di minimo relativo.

---

2 L'integrale $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x^3}}dx$ è un integrale improprio perché il secondo estremo non appartiene al dominio della funzione integranda.
Per calcolarlo, quindi, occorre calcolare il limite:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x^3}}dx = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x^3}}dx.$$

Calcoliamo inizialmente l'integrale indefinito mediante la sostituzione $t=\sqrt{x}$, $x=t^2$, $dx = 2tdt$.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x^3}}dx = \int \frac{t}{1-t^3}\cdot 2tdt = -\frac{2}{3}\int\frac{-3t^2}{1-t^3}dt = -\frac{2}{3}\ln|1-t^3| + c.$$

Riscriviamo il risultato nella variabile x:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x^3}}dx = -\frac{2}{3}\ln|1-\sqrt{x^3}| + c$$

e calcoliamo l'integrale definito:

$$\lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x^3}}dx = \lim_{b\to 1^-}\left[-\frac{2}{3}\ln|1-\sqrt{x^3}|\right]_0^b = \lim_{b\to 1^-}\left[-\frac{2}{3}\ln|1-\sqrt{b^3}| + \frac{2}{3}\ln|1-0|\right] = +\infty.$$

---

3 Il limite $\lim_{x\to e^+}\frac{\int_e^x \pi f(t)\,dt}{x\ln x - x}$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ (è implicito nel testo dell'esercizio che l'integrale al numeratore esista e sia finito; possiamo quindi supporre che la funzione f sia priva di singolarità, ovvero sia continua, in un intorno destro di $x=e$, estremo incluso).
Riscriviamo l'integrale nel seguente modo:

$$\lim_{x\to e^+}\frac{\int_e^x \pi\, f(t)\,dt}{x\ln x - x} = \lim_{x\to e^+}\frac{\pi\left[\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^e f(t)\,dt\right]}{x\ln x - x}.$$

Utilizziamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to e^+}\frac{\int_e^x \pi\, f(t)\,dt}{x\ln x - x} = \lim_{x\to e^+}\frac{\pi\left[\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^e f(t)\,dt\right]}{x\ln x - x} = \lim_{x\to e^+}\frac{\pi\, f(x)}{\ln x} = 2\pi.$$

---

4 Calcoliamo l'integrale generalizzato $\int\frac{dx}{x^2-\alpha^2}$.

Cerchiamo due parametri A, B tali che $\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x+\alpha} = \frac{1}{x^2-\alpha^2}$.

$$\frac{Ax + A\alpha + Bx - B\alpha}{x^2-\alpha^2} = \frac{1}{x^2-a^2} \to \begin{cases} A+B=0 \\ A-B = \frac{1}{\alpha}\end{cases} \to \begin{cases} A = \frac{1}{2\alpha} \\ B = -\frac{1}{2\alpha}\end{cases}$$

Pertanto l'integrale diventa:

$$\int \frac{dx}{x^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha}\int\frac{dx}{x-\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\int\frac{dx}{x+\alpha} = \frac{1}{2\alpha}\left(\ln|x-\alpha| - \ln|x+\alpha|\right).$$

L'integrale definito è un integrale improprio, scriviamolo pertanto sotto forma di limite:

$$\int_0^{\alpha}\frac{dx}{x^2-\alpha^2} = \lim_{t\to\alpha^-}\left[\frac{1}{2\alpha}\left(\ln|x-\alpha| - \ln|x+\alpha|\right)\right]_0^t = \frac{1}{2\alpha}\lim_{t\to\alpha^-}\left(\ln|t-\alpha| - \ln|t+\alpha|\right) = -\infty$$

per ogni valore di $\alpha > 0$ perché $\lim_{t\to\alpha^-}\ln|t-\alpha| = -\infty$.

L'integrale è quindi divergente per ogni valore di $\alpha > 0$.

---

5 Studiamo sommariamente i grafici delle funzioni $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ e $g(x) = \dfrac{x+5}{\sqrt{x-3}}$.

- D_f: $x < 3$;
- $f(x) > 0 \to \forall x \in D_f$;
- $x = 0 \to y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \to y = 0$ asintoto orizzontale.
- $\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty \to x = 3$ asintoto verticale.
- $f'(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}(-1)}{3-x} = \dfrac{1}{2}(3-x)^{-\frac{3}{2}}$

  è sempre positiva nel dominio, quindi la funzione è sempre crescente.
- $f''(x) = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{3}{2}\right)(3-x)^{-\frac{5}{2}}(-1) = \dfrac{3}{4}(3-x)^{-\frac{5}{2}}$

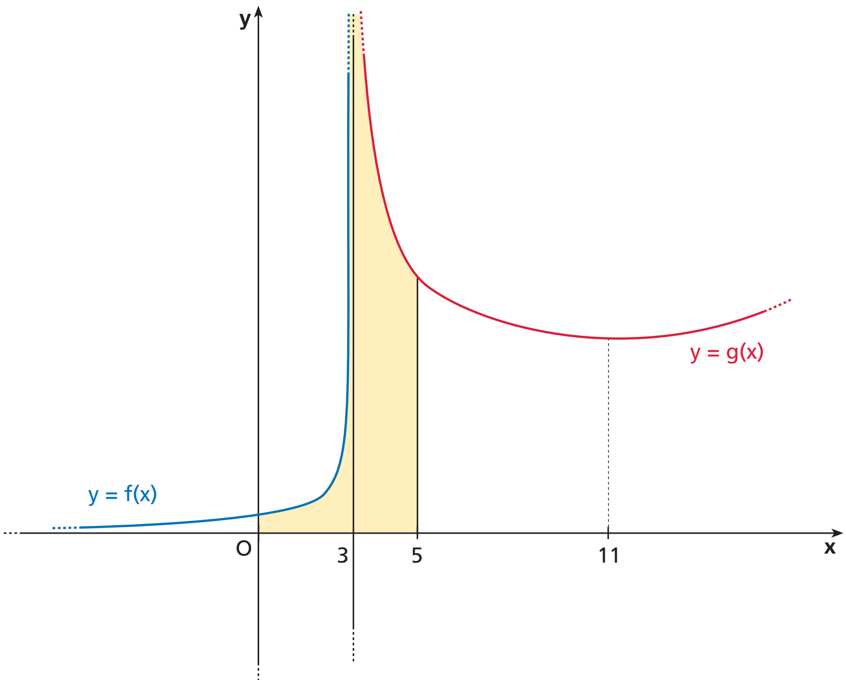
  è sempre positiva nel dominio quindi la funzione ha la concavità rivolta verso l'alto.

- D_g: $x > 3$;
- $g(x) > 0 \to \forall x \in D_g$;
- nessuna intersezione con gli assi;
- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ e

  $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{x+5}{x\sqrt{x-3}} = 0 \to$ non c'è l'asintoto obliquo;
- $\lim_{x\to 3^+} g(x) = +\infty \to x = 3$ asintoto verticale;
- $g'(x) = \dfrac{\sqrt{x-3} - \dfrac{x+5}{2\sqrt{x-3}}}{x-3} = \dfrac{x-11}{2(x-3)\sqrt{x-3}}$,

  $g'(x) > 0 \to x > 11$ quindi la funzione ha un punto di minimo in $x = 11$;
- $g''(x) = \dfrac{-x+27}{4(x-3)^{\frac{5}{2}}} \to$ la funzione ha un flesso di ascissa $x = 27$.

Rappresentiamo le due funzioni nello stesso piano cartesiano e la parte di piano di cui dobbiamo calcolare l'area.



Dal grafico osserviamo che la parte di piano di cui dobbiamo calcolare l'area contiene un punto di discontinuità per entrambe le funzioni. Dobbiamo quindi calcolare un integrale improprio.

Indichiamo con Ω l'area della parte di piano evidenziata e suddividiamo l'intervallo $[0; 5]$ in due sottointervalli $[0; 3[$ e $]3; 5]$. Calcolando i limiti, otteniamo:

$$\Omega = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{3-x}} + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{3+\varepsilon}^{5} \frac{x+5}{\sqrt{x-3}}\, dx.$$

Calcoliamo separatamente i due integrali indefiniti:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-x}} = -2\sqrt{3-x};$$

$$\int \frac{x+5}{\sqrt{x-3}}\, dx = \int \frac{x-3}{\sqrt{x-3}}\, dx + \int \frac{8}{\sqrt{x-3}}\, dx = \int \sqrt{x-3}\, dx + 16\sqrt{x-3} =$$

$$= \frac{2}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}} + 16\sqrt{x-3}.$$

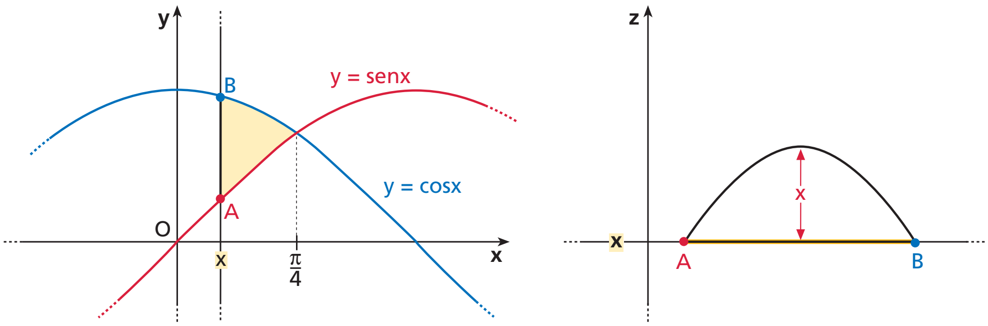
Infine, calcoliamo l'area:

$$\Omega = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[-2\sqrt{3-x}\right]_0^{3-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{2}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}} + 16\sqrt{x-3}\right]_{3+\varepsilon}^{5} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} (-2\sqrt{\varepsilon} + 2\sqrt{3}) + \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} + 16\sqrt{2} - \frac{2}{3}(\varepsilon)^{\frac{3}{2}} - 16\sqrt{\varepsilon}\right) = 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2} + 16\sqrt{2} =$$

$$= 2\sqrt{3} + \frac{52}{3}\sqrt{2}.$$

6 Rappresentiamo in figura il problema.



Come si vede dalla figura a destra, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, la sezione è un segmento parabolico di base $\overline{AB} = \cos x - \operatorname{sen} x$ e altezza x, quindi, per il teorema di Archimede, la sua area è $\frac{2}{3}x(\cos x - \operatorname{sen} x)$.

Calcoliamo il volume del solido.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{3}x(\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx = \frac{2}{3}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\operatorname{sen} x\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left\{\left[x\operatorname{sen} x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[x\cos x - \operatorname{sen} x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right\} = \frac{2}{3}\left[\frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} - \frac{2}{3}.$$

---

7 Calcoliamo l'integrale con il metodo di Cavalieri-Simpson.

Suddividiamo l'intervallo in 16 parti e compiliamo la tabella.

a	0	$f(a)$	1,000000000000
x_1	0,0625	y_1	1,064624394159
x_2	0,125	y_2	1,134254503553
x_3	0,1875	y_3	1,210199331713
x_4	0,25	y_4	1,294017983088
x_5	0,3125	y_5	1,387537494771
x_6	0,375	y_6	1,492862582210
x_7	0,4375	y_7	1,612376405595
x_8	0,5	y_8	1,748732986198
x_9	0,5625	y_9	1,904843634394
x_{10}	0,625	y_{10}	2,083861192249
x_{11}	0,6875	y_{11}	2,289166559884
x_{12}	0,75	y_{12}	2,524361631559
x_{13}	0,8125	y_{13}	2,793271552684
x_{14}	0,875	y_{14}	3,099957562709
x_{15}	0,9375	y_{15}	3,448740133412
b	1	$f(b)$	3,844231028159

$$\int_0^1 e^x\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{1}{48}\left[f(a) + f(b) + 2(y_2 + \ldots + y_{14}) + 4(y_1 + \ldots + y_{15})\right] = 1{,}967570124.$$

Calcoliamo l'errore commesso con il metodo di Runge, applicando nuovamente il metodo di Cavalieri-Simpson ai soli valori della tabella evidenziati in giallino.

$$\int_0^1 e^x \sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{1}{24}\left[f(a) + f(b) + 2(y_4 + y_8 + y_{12}) + 4(y_2 + y_6 + y_{10} + y_{14})\right] = 1{,}96759165.$$

L'errore commesso è $\dfrac{|1{,}967570124 - 1{,}96759165|}{15} \simeq 1{,}4 \cdot 10^{-6}$.