Risoluzione della verifica IN UN'ORA - PRIMA PROVA

1 Calcoliamo l'integrale definito $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx$.

Applichiamo il metodo d'integrazione per parti dove $\operatorname{sen} x = D(-\cos x)$:

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx = \left[-x\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x \, dx = \left[-x\cos x\right]_0^{\pi} + \left[\operatorname{sen} x\right]_0^{\pi} = \pi.$$

---

2 Calcoliamo l'integrale definito $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x}\,(1+x)} dx$.

Risolviamo l'integrale applicando la sostituzione:

$t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, $dx = 2tdt$

rispetto alla quale anche gli estremi di integrazione devono essere modificati:

$x = 1 \to t^2 = 1 \to t = 1$;

$x = 3 \to t^2 = 3 \to t = \sqrt{3}$.

dove abbiamo scelto solo i valori positivi perché $t > 0$.

$$\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x}\,(1+x)} dx = \int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{1+t^2} \cdot 2tdt = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{1+t^2} dt =$$

$$= 2\int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1+t^2}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = 2\int_1^{\sqrt{3}} dt - 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2} dt = 2\left[t - \operatorname{arctg} t\right]_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2\left(\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\sqrt{3} - 1 + \operatorname{arctg} 1\right) = 2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{6}.$$

---

3 Per determinare la funzione integrale $F(x)$ di $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x < 2 \\ \frac{1}{x} & \text{se } 2 \le x \le 4 \end{cases}$ dobbiamo calcolare i seguenti integrali:

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x f(t)\,dt & \text{se } x \in [0; 2[\\ 2 + \int_2^x f(t)\,dt & \text{se } x \in [2; 4] \end{cases} \to F(x) = \begin{cases} \int_0^x t\,dt & \text{se } x \in [0; 2[\\ 2 + \int_2^x \frac{1}{t}\,dt & \text{se } x \in [2; 4] \end{cases} \to$$

$$\to F(x) = \begin{cases} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x & \text{se } x \in [0; 2[\\ 2 + \left[\ln|t|\right]_2^x & \text{se } x \in [2; 4] \end{cases} \to F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{se } x \in [0; 2[\\ 2 + \ln|x| - \ln 2 & \text{se } x \in [2; 4] \end{cases}$$

$F(x)$ è una funzione definita a tratti da due funzioni continue e derivabili (negli intervalli considerati), quindi dobbiamo verificare la continuità solo nel punto di raccordo:

$\lim_{x \to 2^-} F(x) = 2$ e $F(2) = 2$.

La funzione è, quindi, continua in 2. Stabiliamo se è anche derivabile.

Poiché $F'(x) = f(x)$ per $x \ne 2$ e $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2 \ne f(2) = \frac{1}{2}$, allora $F(x)$ non è derivabile in $x = 2$.

---

4 Calcoliamo l'integrale:

$$\int_k^3 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\left[\ln|1+x^2|\right]_k^3 = \frac{1}{2}\left[\ln 10 - \ln(1+k^2)\right]$$

e risolviamo l'equazione:

$$\frac{1}{2}\left[\ln 10 - \ln(1+k^2)\right] = 1 \to \ln\frac{10}{1+k^2} = 2 \to \frac{10}{1+k^2} = e^2 \to e^2k^2 = 10 - e^2 \to$$

$$\to k = \pm\sqrt{10e^{-2}-1}.$$

Interpretazione grafica

Possiamo suddividere l'intervallo $[-\sqrt{10e^{-2}-1}; 3]$ in due sottointervalli $[-\sqrt{10e^{-2}-1};\ \sqrt{10e^{-2}-1}]$ e $[\sqrt{10e^{-2}-1}; 3]$ e, per la linearità dell'integrale, abbiamo:

$$\int_{-\sqrt{10e^{-2}-1}}^{3}\frac{x}{1+x^2}dx = \int_{-\sqrt{10e^{-2}-1}}^{\sqrt{10e^{-2}-1}}\frac{x}{1+x^2}dx + \int_{\sqrt{10e^{-2}-1}}^{3}\frac{x}{1+x^2}dx.$$

Per quanto appena calcolato, il primo e ultimo integrale valgono entrambi 1 quindi:

$$\int_{-\sqrt{10e^{-2}-1}}^{\sqrt{10e^{-2}-1}}\frac{x}{1+x^2}dx = 0.$$

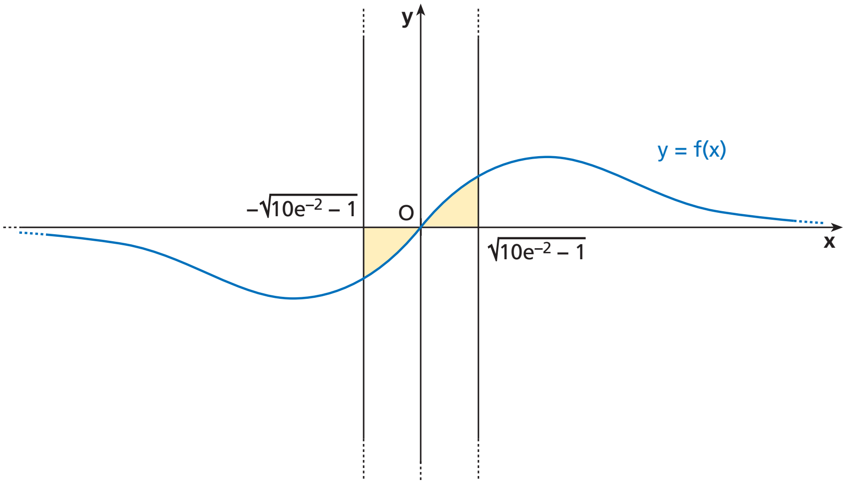
L'intervallo d'integrazione (simmetrico rispetto all'origine) è non nullo, quindi l'unica possibilità affinché l'integrale sia nullo, è che la funzione sia simmetrica rispetto all'origine e che le aree delle porzioni di piano comprese tra il grafico della funzione, gli assi cartesiani e le rette $x = -\sqrt{10e^{-2}-1}$ e $x = \sqrt{10e^{-2}-1}$, rispettivamente, siano tra loro uguali.

In altre parole, il valor medio della funzione integranda nell'intervallo $[-\sqrt{10e^{-2}-1};\ \sqrt{10e^{-2}-1}]$ deve essere zero.

Confermiamo il risultato ottenuto tracciando un grafico probabile della funzione $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$:

- $D = \mathbb{R}$;
- $x = 0 \to y = 0$;
- $f(x) > 0 \to x > 0$;
- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \to y = 0$ è asintoto orizzontale per f;
- $f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0 \to -1 \leq x \leq 1.$

Quindi la funzione ha in $x = -1$ un punto di minimo relativo e in $x = 1$ un punto di massimo relativo.



5 Per il teorema del valor medio, esiste un punto $c \in [0; \pi]$ in cui $f(c) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

Calcoliamo $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$, integrando due volte per parti.

$$\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} 2x\,dx = \left[-x^2\cdot\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x\cdot\frac{\cos 2x}{2}dx =$$

$$= \left[-x^2 \cdot \frac{\cos 2x}{2}\right]_0^\pi + \left[x \cdot \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} dx =$$

$$= \left[-x^2 \cdot \frac{\cos 2x}{2}\right]_0^\pi + \left[x \cdot \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi 2 \operatorname{sen} x \cos x \, dx =$$

$$= \left[-x^2 \cdot \frac{\cos 2x}{2}\right]_0^\pi + \left[x \cdot \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}^2 x\right]_0^\pi = -\frac{\pi^2}{2}.$$

Quindi il valor medio è $f(c) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi^2}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

6 Operando una sostituzione e sfruttando le proprietà di linearità dell'integrale, riconduciamo il calcolo dell'integrale $\int_6^9 f\left(\frac{x}{3}\right) dx$ ai due integrali noti.

Mediante la sostituzione $t = \frac{x}{3}$, otteniamo:

$$\int_6^9 f\left(\frac{x}{3}\right) dx = \int_2^3 3\, f(t)\, dt.$$

Per la linearità, abbiamo:

$$\int_0^2 f(t)\, dt + \int_2^3 f(t)\, dt = \int_0^3 f(t)\, dt \to \int_2^3 f(t)\, dt = \int_0^3 f(t)\, dt - \int_0^2 f(t)\, dt.$$

Pertanto, unendo i due risultati troviamo:

$$\int_6^9 f\left(\frac{x}{3}\right) dx = \int_2^3 3\, f(t)\, dt = 3\left(\int_0^3 f(t)\, dt - \int_0^2 f(t)\, dt\right) = 3\,(4-3) = 3.$$

7 Distinguiamo due casi.

Se $a = 0$, allora:

$$\int_0^1 \frac{a}{1 + a^2x^2} dx = \int_0^1 0\, dx = 0 \text{ e } \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^0 \frac{dx}{1+x^2} = 0,$$

quindi l'uguaglianza è verificata.

Se $a \neq 0$, mediante la sostituzione $t = ax$, $x = \frac{t}{a}$, $dx = \frac{dt}{a}$ otteniamo:

$$\int_0^1 \frac{a}{1 + a^2x^2} dx = \int_0^a \frac{a}{1+t^2} \cdot \frac{dt}{a} = \int_0^a \frac{dt}{1+t^2}.$$

Quindi l'uguaglianza è verificata per ogni a reale.