Risoluzione della verifica IN UN'ORA - SECONDA PROVA

1 Calcoliamo l'integrale di $f'(x) = e^x \operatorname{sen} x$, applicando due volte il metodo di integrazione per parti e raccogliendo i termini comuni.

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \left[e^x \cos x - \int e^x(-\operatorname{sen} x)\, dx\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx \rightarrow$$

$$\rightarrow 2\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x \rightarrow$$

$$\rightarrow f(x) = \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + c.$$

Determiniamo il valore del parametro c in modo che il grafico della primitiva passi per l'origine degli assi.

$$f(0) = 0 \rightarrow \frac{e^0}{2}(\operatorname{sen} 0 - \cos 0) + c = 0 \rightarrow \frac{1}{2}(0 - 1) = -c \rightarrow c = \frac{1}{2}.$$

La primitiva cercata è $f(x) = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + \frac{1}{2}$.

---

2 Esprimiamo la derivata della cotangente in funzione della cotangente stessa:

$$\mathrm{D}(\operatorname{cotg} x) = -1 - \operatorname{cotg}^2 x.$$

Calcoliamo:

$$\int \operatorname{cotg}^2 x\, dx = -\int -\operatorname{cotg}^2 x\, dx = -\int (1 - 1 - \operatorname{cotg}^2 x)\, dx =$$

$$= -\int dx - \int (-1 - \operatorname{cotg}^2 x)\, dx.$$

Dal calcolo della derivata sappiamo che il secondo integrale è la cotangente, quindi:

$$\int \operatorname{cotg}^2 x\, dx = -x - \operatorname{cotg} x + c.$$

---

3 Calcoliamo tutte le primitive di $f(x) = x\left(\frac{3}{2} - \ln x\right)$.

$$F(x) = \int x\left(\frac{3}{2} - \ln x\right)dx = \frac{3}{2}\int x\, dx - \int x \ln x\, dx = \frac{3}{4}x^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \frac{3}{4}x^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{3}{4}x^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + c = x^2\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\ln x\right) + c.$$

Calcoliamo la derivata seconda e determiniamo i flessi di $F(x)$.

$$F'(x) = \frac{3}{2}x - x\ln x \rightarrow F''(x) = \frac{3}{2} - \ln x - x\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \ln x,$$

$$F''(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{2} - \ln x = 0 \rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \sqrt{e} \rightarrow F(\sqrt{e}) = e\left(1 - \frac{1}{4}\right) + c = \frac{3e}{4} + c.$$

Determiniamo l'equazione della retta tangente al grafico di $F(x)$ nel suo punto di flesso di coordinate $\left(\sqrt{e}; \frac{3e}{4} + c\right)$.

$$y - \left(\frac{3e}{4} + c\right) = F'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) \rightarrow y = \left(\frac{3}{2}\sqrt{e} - \sqrt{e}\ln\sqrt{e}\right)(x - \sqrt{e}) + \frac{3e}{4} + c \rightarrow$$

$$\rightarrow y = x\sqrt{e} - e + \frac{3e}{4} + c \rightarrow y = x\sqrt{e} - \frac{e}{4} + c.$$

Calcoliamo tutte le intersezioni del grafico di $f(x)$ con l'asse x e stabiliamo qual è la maggiore.

$$f(x) = 0 \rightarrow x\left(\frac{3}{2} - \ln x\right) = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = e^{\frac{3}{2}}.$$

Il punto d'intersezione di ascissa maggiore è $\left(e^{\frac{3}{2}}; 0\right)$.

Determiniamo, quindi, quale valore deve assumere il parametro c in modo che la retta di equazione $y = x\sqrt{e} - \frac{e}{4} + c$ passi per il punto di coordinate $\left(e^{\frac{3}{2}}; 0\right)$:

$$0 = e^{\frac{3}{2}}\sqrt{e} - \frac{e}{4} + c \rightarrow c = \frac{e}{4} - e^2.$$

La primitiva cercata è pertanto $F(x) = x^2\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\ln x\right) + \frac{e}{4} - e^2$.

---

4 Risolviamo i punti **a)** e **c)** in due modi diversi.

I METODO

a) Calcoliamo tutte le primitive di $f(x) = \frac{x^2(x-6)}{3(x-2)^3}$.

$$\int \frac{x^2(x-6)}{3(x-2)^3}\,dx = \int \frac{(t+2)^2(t-4)}{3t^3}\,dt$$

dove abbiamo effettuato la sostituzione $t = x - 2$, $x = t + 2$, $dx = dt$.
Svolgiamo i calcoli e risolviamo l'integrale:

$$\int \frac{(t+2)^2(t-4)}{3t^3}\,dt = \int \frac{t^3 - 12t - 16}{3t^3}\,dt =$$

$$= \int\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{t^2} - \frac{16}{3t^3}\right)dt = \frac{t}{3} - \frac{4t^{-1}}{-1} - \frac{16}{3}\cdot\frac{t^{-2}}{-2} + c =$$

$$= \frac{t}{3} + \frac{4}{t} + \frac{8}{3t^2} + c = \frac{t^3 + 12t + 8}{3t^2} + c.$$

Riscriviamo il risultato nella variabile x e svolgiamo i calcoli:

$$F(x) = \frac{(x-2)^3 + 12(x-2) + 8}{3(x-2)^2} + c =$$

$$= \frac{x^3 - 6x^2 + 24x - 24}{3(x-2)^2} + c.$$

b) Per calcolare i punti di minimo delle funzioni $f(x)$ e $F(x)$, calcoliamo le loro derivate, poniamole uguale a zero e studiamo il loro segno.

$$f(x) = \frac{x^3 - 6x^2}{3(x-2)^3},$$

$$f'(x) = \frac{3(x-2)^3(3x^2 - 12x) - 9(x-2)^2(x^3 - 6x^2)}{9(x-2)^6} = \frac{24x}{3(x-2)^4} = \frac{8x}{(x-2)^4},$$

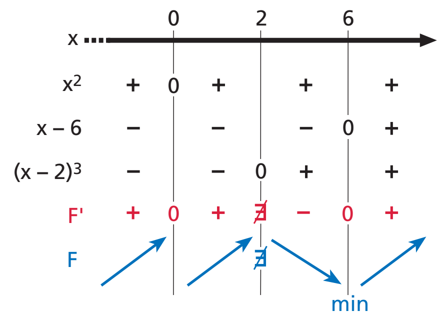
$$f'(x) \geq 0 \rightarrow x \geq 0.$$

Quindi $(0; 0)$ è un punto di minimo relativo per $f(x)$.

$$F(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 24x - 24}{3(x-2)^2} + c,$$

$$F'(x) = f(x) = \frac{x^2(x-6)}{3(x-2)^3},$$

$$F'(x) \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 \geq 0 \\ x - 6 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \forall x \\ x \geq 6 \\ x > 2 \end{cases}$$



Dallo schema dei segni deduciamo che $\left(6; c + \frac{5}{2}\right)$ è punto di minimo per $F(x)$.

c) Determiniamo c in modo che la retta di equazione $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ sia asintoto di

$$F(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 24x - 24}{3(x-2)^2} + c.$$

- $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3 - 6x^2 + 24x - 24}{3x(x-2)^2} + \frac{c}{x} \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{c}{x} + \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{24}{x^2} - \frac{24}{x^3}\right)}{3x^3\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2} = \frac{1}{3}.$$

Il coefficiente angolare dell'asintoto obliquo è $\frac{1}{3}$ indipendentemente dal valore del parametro c.

- $$\lim_{x \to \pm\infty} \left[F(x) - \frac{1}{3}x \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3 - 6x^2 + 24x - 24}{3(x-2)^2} + c - \frac{1}{3}x \right] =$$
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{-2x^2 + 20x - 24}{3(x-2)^2} + c \right] = c - \frac{2}{3}.$$

Imponendo che il termine noto sia $\frac{1}{3}$, otteniamo $c - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \rightarrow c = 1$.

Pertanto la primitiva richiesta è:

$$F(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 24x - 24}{3(x-2)^2} + 1 = \frac{x^3 - 6x^2 + 24x - 24 + 3x^2 - 12x + 12}{3(x-2)^2} =$$
$$= \frac{x^3 - 3x^2 + 12x - 12}{3(x-2)^2}.$$

II METODO

a) Calcoliamo una primitiva di $f(x) = \frac{x^2(x-6)}{3(x-2)^3}$ riscrivendo la funzione nel seguente modo:

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3 - 6x^2}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 12x + 8 - 8}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} =$$
$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{-12x + 8}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\right).$$

Abbiamo quindi:

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{3} \int \left(1 + \frac{-12x + 8}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \int \frac{2 - 3x}{(x-2)^3}\,dx.$$

Determiniamo le costanti A, B, C in modo che:

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}=\frac{2-3x}{(x-2)^3}\to$$

$$\to\frac{Ax^2+(B-4A)x+4A-2B+C}{(x-2)^3}=\frac{2-3x}{(x-2)^3}\to$$

$$\to\begin{cases}A=0\\B-4A=-3\\4A-2B+C=2\end{cases}\to\begin{cases}A=0\\B=-3\\C=-4\end{cases}$$

Pertanto, sostituendo nell'integrale e svolgendo i calcoli, otteniamo:

$$\int f(x)\,dx=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\int\left[\frac{-3}{(x-2)^2}+\frac{-4}{(x-2)^3}\right]dx=$$

$$=\frac{1}{3}x-4\int(x-2)^{-2}dx-\frac{16}{3}\int(x-2)^{-3}dx=$$

$$=\frac{1}{3}x+4\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}+c=$$

$$=\frac{x^3-4x^2+16x-16}{3(x-2)^2}+c.$$

La generica primitiva di $f(x)$ è quindi la funzione $F(x)=\dfrac{x^3-4x^2+16x-16}{3(x-2)^2}+c$.

b) Vedi punto **b)**, **I METODO**.

c) Determiniamo il valore del parametro c in modo che la retta di equazione $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ sia asintoto di $F(x)=\dfrac{x^3-4x^2+16x-16}{3(x-2)^2}+c$.

Calcoliamo i seguenti limiti:

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^3-4x^2+16x-16}{3x(x-2)^2}+\dfrac{c}{x}\right]=\dfrac{1}{3}$;
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^3-4x^2+16x-16}{3(x-2)^2}+c-\dfrac{1}{3}x\right]=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2+16x-16+3c(x-2)^2-x(x-2)^2}{3(x-2)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3cx^2-12(c-1)x-16+12c}{3(x-2)^2}=c.$$

Perché la retta $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ sia asintoto obliquo di $F(x)$, dobbiamo porre $c=\frac{1}{3}$.

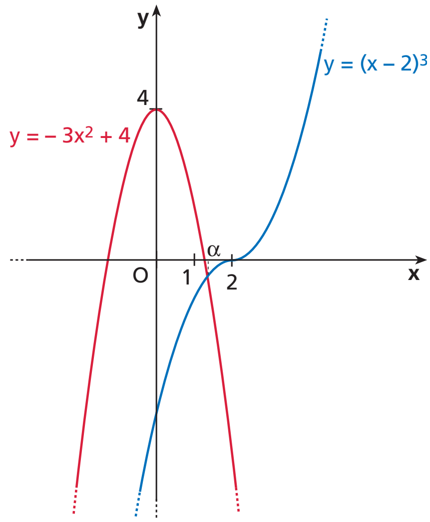
Pertanto la primitiva è:

$$F(x)=\frac{x^3-4x^2+16x-16}{3(x-2)^2}+\frac{1}{3}=\frac{x^3-3x^2+12x-12}{3(x-2)^2}.$$

d) Studiamo il grafico di $F(x)=\dfrac{x^3-3x^2+12x-12}{3(x-2)^2}$.

- $D=\mathbb{R}-\{2\}$.

- Studiamo graficamente il segno di $F(x)$.
  Il denominatore è sempre positivo, quindi ci occupiamo solo del numeratore:
  $$x^3 - 3x^2 + 12x - 12 > 0 \rightarrow (x-2)^3 + 3x^2 - 4 > 0 \rightarrow$$
  $$\rightarrow (x-2)^3 > -3x^2 + 4.$$
  Indicando con α (figura a lato) l'ascissa del punto d'intersezione della parabola di equazione $y = -3x^2 + 4$ con la cubica di equazione $y = (x-2)^3$, con $\alpha \in \,]1; 2[$, otteniamo che $F(x) > 0$ nell'intervallo $]\alpha; +\infty[$.



- $y = 0 \rightarrow x = \alpha$,
  $x = 0 \rightarrow y = \dfrac{-12}{12} = -1$.
- Dal punto **c)** sappiamo che la retta di equazione $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$ è asintoto obliquo;
  $\lim_{x \to 2^{\pm}} F(x) = \lim_{x \to 2^{\pm}} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 12x - 12}{3(x-2)^2} = +\infty \rightarrow x = 2$ è asintoto verticale per la funzione.
- Dal punto **b)** sappiamo che $F(x)$ è crescente negli intervalli $]-\infty; 2[$ e $]6; +\infty[$ e ha un punto di minimo relativo in $\left(6; \dfrac{7}{2}\right)$.
- $F''(x) = f'(x)$. Dal punto **b)** sappiamo che $F(x)$ ha la concavità rivolta verso l'alto nell'intervallo $]0; +\infty[$ e ha un flesso in $(0; -1)$.

Tracciamo il grafico della funzione.