# Risoluzione della verifica IN UN'ORA - PRIMA PROVA

**1** Risolviamo l'integrale indefinito $\int x \cdot 3^{x^2-2} dx$.

Osserviamo che:

- il fattore $x$ è la derivata dell'esponente a meno di una costante: $D(x^2-2) = 2x$;
- la derivata di una funzione composta di una funzione esponenziale di base $b$, diversa da $e$, è:

$$D(b^{f(x)}) = b^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln b.$$

Moltiplichiamo e dividiamo la funzione integranda per il coefficiente $2\ln 3$ in modo da ottenere la derivata della funzione composta $3^{x^2-2}$:

$$\int x \cdot 3^{x^2-2} dx = \frac{1}{2\ln 3} \int 2x \cdot 3^{x^2-2} \cdot \ln 3 \, dx = \frac{1}{2\ln 3} \cdot 3^{x^2-2} + c.$$

---

**2** Risolviamo l'integrale indefinito $\int \frac{x^3}{2x^4+1} dx$.

Osserviamo che:

- il termine al numeratore è la derivata del denominatore a meno di una costante: $D(2x^4+1) = 8x^3$;
- se la funzione integranda è del tipo $\frac{f'(x)}{f(x)}$ allora l'integrale è $\ln|f(x)|$.

Moltiplichiamo e dividiamo la funzione integranda per il coefficiente 8 in modo da ottenere la derivata della funzione composta $\ln(2x^4+1)$:

$$\int \frac{x^3}{2x^4+1} dx = \frac{1}{8} \int \frac{8x^3}{2x^4+1} dx = \frac{1}{8} \ln|2x^4+1| + c.$$

---

**3** Risolviamo l'integrale indefinito $\int \frac{3x}{\sqrt{x+5}} dx$.

L'integrale non è riconducibile a una delle forme immediate quindi utilizziamo una sostituzione. Ponendo $t = \sqrt{x+5}$, abbiamo $x = t^2 - 5$ e $dx = 2t\,dt$.
Pertanto l'integrale diventa:

$$\int \frac{3x}{\sqrt{x+5}} dx = \int \frac{3(t^2-5)}{t} 2t dt = \int 6(t^2-5)\, dt = \int 6t^2 dt - \int 30 dt = 2t^3 - 30t + c.$$

Riscriviamo il risultato nella variabile $x$:

$$\int \frac{3x}{\sqrt{x+5}} dx = [2(x+5) - 30]\sqrt{x+5} + c = 2(x-10)\sqrt{x+5} + c.$$

---

**4** Risolviamo l'integrale indefinito $\int \frac{dx}{1+e^{-x}}$.

Riscriviamo la funzione integranda portando l'esponenziale al numeratore:

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}} = \frac{e^x}{e^x+1}.$$

La funzione integranda è ora nella forma $\frac{f'(x)}{f(x)}$, quindi l'integrale è:

$$\int \frac{dx}{1+e^{-x}} = \int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \ln|e^x+1| + c.$$

**5** Risolviamo l'integrale indefinito $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x^3}}\,dx$.

L'integrale non è riconducibile a una delle forme immediate, quindi, dopo aver riscritto la funzione integranda portando la radice al numeratore, procediamo per parti.

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x^3}}\,dx = \int \ln x \cdot x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \ln x \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{2\ln x}{\sqrt{x}} + 2\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx =$$

$$= -\frac{2\ln x}{\sqrt{x}} + 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{x}}(\ln x + 2) + c.$$

---

**6** Risolviamo l'integrale indefinito $\int \cos \ln x\,dx$.

L'integrale non è riconducibile a una delle forme immediate, quindi procediamo per sostituzione, ponendo $t = \ln x$ da cui otteniamo $x = e^t$ e $dx = e^t\,dt$.
Pertanto l'integrale diventa:

$$\int \cos \ln x\,dx = \int \cos t \cdot e^t\,dt.$$

Se applichiamo due volte l'integrazione per parti, ritroviamo l'integrale di partenza:

$$\int \cos t \cdot e^t\,dt = \cos t \cdot e^t - \int (-\operatorname{sen} t) \cdot e^t\,dt = \cos t \cdot e^t + \left(\operatorname{sen} t \cdot e^t - \int \cos t \cdot e^t\,dt\right).$$

Consideriamo il primo e ultimo termine della catena di uguaglianze e raccogliamo i termini uguali:

$$2\int \cos t \cdot e^t\,dt = \cos t \cdot e^t + \operatorname{sen} t \cdot e^t \to \int \cos t \cdot e^t\,dt = \frac{e^t}{2}(\cos t + \operatorname{sen} t) + c.$$

Riscrivendo il risultato nella variabile $x$, otteniamo:

$$\int \cos \ln x\,dx = \frac{x}{2}(\cos \ln x + \operatorname{sen} \ln x) + c.$$

---

**7** Risolviamo l'integrale indefinito $\int 2 \cdot \frac{2\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 2x}\,dx$.

Riscriviamo la funzione integranda utilizzando la formula di duplicazione del seno e spezzando in due la frazione.

$$\int 2 \cdot \frac{2\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 2x}\,dx = \int 2 \cdot \frac{2\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{4\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - \int \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x}\,dx.$$

Abbiamo ottenuto due integrali immediati: la derivata della tangente e della cotangente.

$$\int 2 \cdot \frac{2\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 2x}\,dx = \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\operatorname{cotg} x + c.$$

---

**8** Risolviamo l'integrale indefinito $\int 15\cos^5 x\,dx$.

Riscriviamo la funzione integranda scomponendo la potenza nel prodotto dei termini $\cos x$ e $\cos^4 x$:

$$\int 15\cos^5 x\,dx = \int 15 \cdot \cos^4 x \cdot \cos x\,dx.$$

Applichiamo la prima relazione fondamentale della goniometria e svolgiamo i calcoli:

$$\int 15 \cdot \cos^4 x \cdot \cos x \, dx =$$

$$= \int 15 \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cdot \cos x \, dx = \int 15 \cdot (1 - 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x) \cdot \cos x \, dx =$$

$$= \int 15 \cos x \, dx - 10 \int 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx + 3 \int 5 \operatorname{sen}^4 x \cos x \, dx =$$

$$= 15 \operatorname{sen} x - 10 \operatorname{sen}^3 x + 3 \operatorname{sen}^5 x + c.$$

---

**9** Risolviamo l'integrale indefinito $\int \frac{x-3}{4x^2 - 4x + 1} dx$.

La funzione integranda è una funzione razionale con denominatore di II grado del tipo $\Delta = 0$.
Cerchiamo, quindi, due coefficienti $A$, $B$ tali che:

$$\frac{x-3}{4x^2-4x+1} = \frac{x-3}{(2x-1)^2} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{(2x-1)^2}.$$

Svolgiamo i calcoli e determiniamo $A$ e $B$.

$$\frac{x-3}{4x^2-4x+1} = \frac{A(2x-1)+B}{4x^2-4x+1} \to \begin{cases} 2A = 1 \\ -A + B = -3 \end{cases} \to \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Riscriviamo l'integrale:

$$\int \frac{x-3}{4x^2-4x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{2x-1} - \frac{5}{2} \int \frac{dx}{(2x-1)^2} = \frac{1}{4} \int \frac{2dx}{2x-1} + \frac{5}{4} \int (-2)(2x-1)^{-2} dx =$$

$$= \frac{1}{4} \ln|2x-1| + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2x-1} + c.$$

---

**10** Risolviamo l'integrale indefinito $\int \frac{x-1}{3x^2+2} dx$.

La funzione integranda è una funzione razionale con denominatore di II grado del tipo $\Delta < 0$.
Spezziamo, quindi, l'integrale in due parti e operiamo in modo tale da ottenere la derivata composta di $\ln(3x^2+2)$ nel primo termine e la derivata dell'arcotangente nel secondo.

$$\int \frac{x-1}{3x^2+2} dx = \int \frac{x}{3x^2+2} dx - \int \frac{1}{3x^2+2} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x}{3x^2+2} dx - \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}}} \int \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{1}{6} \ln|3x^2+2| - \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + c.$$