Risoluzione dei problemi

1 **a)** Studiamo il grafico di $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x}$.

- $D: \mathbb{R} -]-1; 1[$.
- $f(-x) = \dfrac{2\sqrt{(-x)^2-1}}{-x} = -\dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x} = -f(x)$, quindi la funzione è dispari.
- Le intersezioni con l'asse delle x hanno ascisse $+1$ e -1.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x}$ si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$.

  Trasportando il denominatore x sotto radice, otteniamo:

  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 2.$$

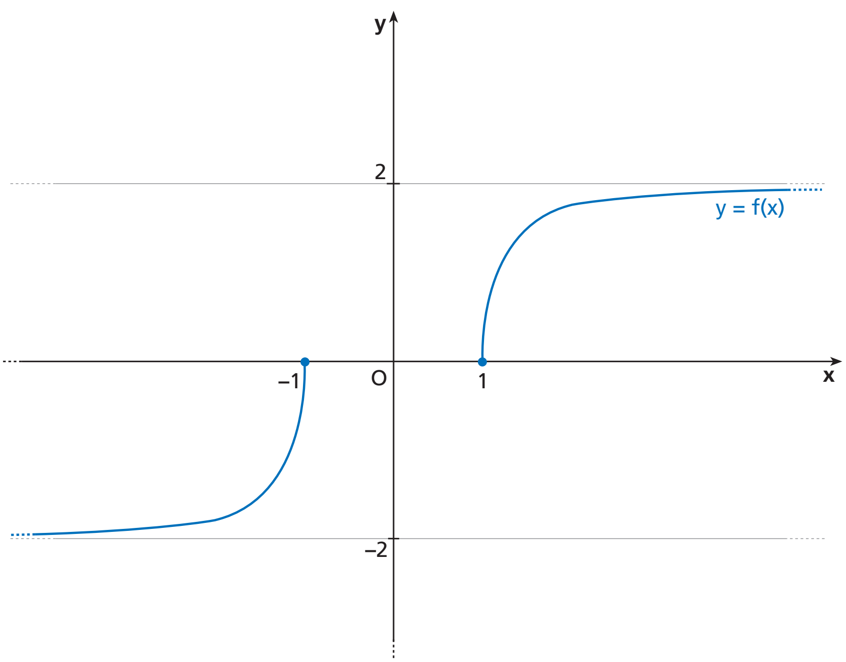
  Quindi la retta di equazione $y = 2$ è asintoto orizzontale a destra.
  Poiché la funzione è dispari, la retta di equazione $y = -2$ è asintoto orizzontale a sinistra.

- $f'(x) = \dfrac{2}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

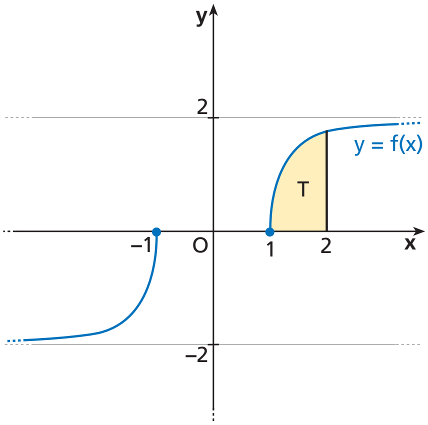
La funzione non è derivabile nei punti in cui la curva interseca l'asse delle ascisse: in tali punti la retta tangente al grafico è parallela all'asse delle y.

$f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} - [-1; 1]$, quindi la funzione è crescente per ogni $x > 1$ e per ogni $x < -1$.

Tracciamo il grafico della funzione.



b) Per determinare l'area del trapezoide T indicato in figura dobbiamo calcolare l'integrale definito $\int_1^2 f(x)\,dx$.



$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x}dx = 2\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$$

Calcoliamo per sostituzione l'integrale indefinito $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$.

Ponendo $t = \sqrt{x^2-1}$, abbiamo $t^2 = x^2 - 1$, $x^2 = t^2 + 1$ da cui $x = \sqrt{t^2+1}$ e $dx = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$.

Sostituendo, otteniamo:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int \frac{t^2}{t^2+1}dt = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = t - \operatorname{arctg} t + c =$$

$$= \sqrt{x^2-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + c.$$

Tornando all'integrale definito otteniamo:

$$area(T) = 2\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = 2\left[\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\right]_1^2 =$$

$$= 2\left(\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\sqrt{3}\right) = 2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right).$$

c) Per calcolare il volume richiesto dobbiamo calcolare il seguente integrale definito:

$$V = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx = \pi\int_1^2 \left(\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^2 dx = 4\pi\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2}dx = 4\pi\left[x + \frac{1}{x}\right]_1^2 = 4\pi\left(\frac{5}{2} - 2\right) = 2\pi.$$

d) Consideriamo il seguente integrale improprio: $\int_1^{+\infty}\left[2 - f(x)\right]dx$.

Scelto $b \geq 1$, verifichiamo se il seguente integrale converge:

$$\int_1^{+\infty}\left[2 - f(x)\right]dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \left[2 - f(x)\right]dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \left(2 - \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x}\right)dx = \lim_{b\to+\infty} 2\int_1^b \left(1 - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)dx.$$

Tenendo conto di quanto abbiamo calcolato al punto **b)**, otteniamo:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \sqrt{x^2-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + c.$$

Pertanto abbiamo:

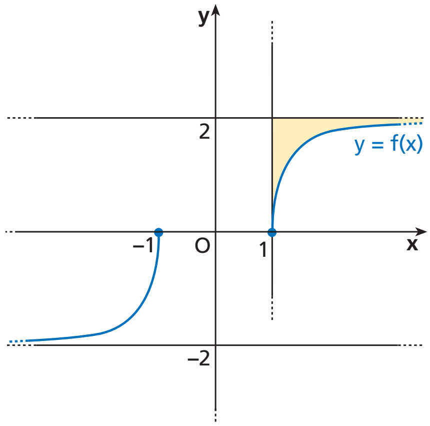
$$\lim_{b\to+\infty} 2\int_1^b \left(1 - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)dx = \lim_{b\to+\infty} 2\left[x - \sqrt{x^2-1} + \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\right]_1^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} 2\left[b - \sqrt{b^2-1} + \operatorname{arctg}\sqrt{b^2-1} - 1\right] = 2\cdot\lim_{b\to+\infty}\left[\underbrace{\left(b - 1 - \sqrt{b^2-1}\right)}_{\text{tende a } -1} + \underbrace{\operatorname{arctg}\sqrt{b^2-1}}_{\text{tende a } \frac{\pi}{2}}\right] =$$

$$= 2\left[-1 + \frac{\pi}{2}\right] = \pi - 2.$$

Quindi l'integrale è convergente.

L'integrale $\int_1^{+\infty}[2 - f(x)]dx$ rappresenta il valore limite dell'area della superficie nel I quadrante compresa tra la curva e il suo asintoto destro (con $x \geq 1$).



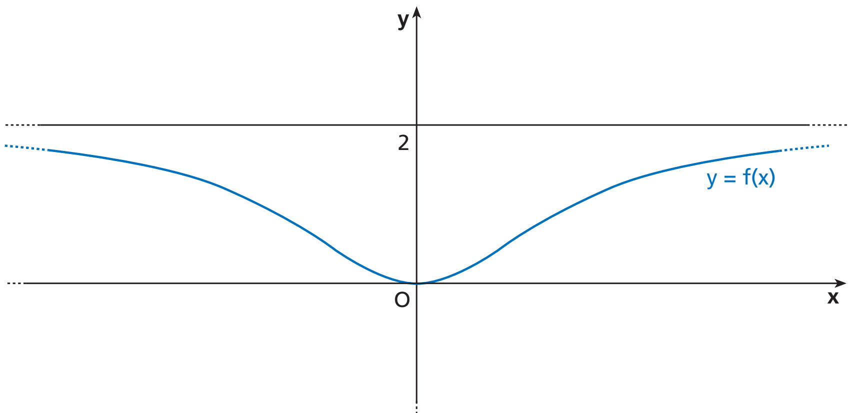
2 **a)** Studiamo il grafico della funzione $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+4}$.

- $D = \mathbb{R}$ e continua in tutto il dominio;
- $f(-x) = f(x) \rightarrow f$ è pari;
- $x = 0 \rightarrow y = 0$;
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2+4} = \lim_{x \to +\infty} 2\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)} = 2.$

Quindi la retta di equazione $y = 2$ è asintoto orizzontale a destra. Poiché la funzione è pari, la stessa retta è asintoto orizzontale anche a sinistra.

- $f'(x) = \frac{16x}{(x^2+4)^2} \rightarrow f(x)$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e l'origine degli assi è punto di minimo relativo (e assoluto) della funzione.
- $f''(x) = \frac{16(4-3x^2)}{(x^2+4)^3} \rightarrow f(x)$ è convessa per $-\frac{2}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ ed è concava altrove. I punti di ascissa $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ sono punti di flesso.

Il grafico della funzione è il seguente.



b) Per trovare tutte le primitive di $f(x)$ occorre calcolare l'integrale indefinito:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{2x^2}{x^2+4}dx = 2\int \frac{x^2}{x^2+4}dx = 2\int \frac{x^2+4-4}{x^2+4}dx = 2\left(x - \int \frac{4}{x^2+4}dx\right) =$$

$$= 2x - 8\int \frac{dx}{x^2+4} = 2x - 8\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right) + c = 2x - 4\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + c.$$

Imponendo il passaggio per l'origine degli assi, otteniamo $c = 0$.

Pertanto $F(x) = 2x - 4\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$. Studiamo il suo grafico.

- $F(x)$ è definita su tutto l'asse reale, continua e derivabile ovunque.
- $F(-x) = -F(x)$, quindi la funzione è dispari.

- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2x - 4 \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\right) = +\infty$. Esiste pertanto la condizione necessaria, ma non sufficiente, per l'esistenza di un eventuale asintoto obliquo. Calcoliamo quindi:

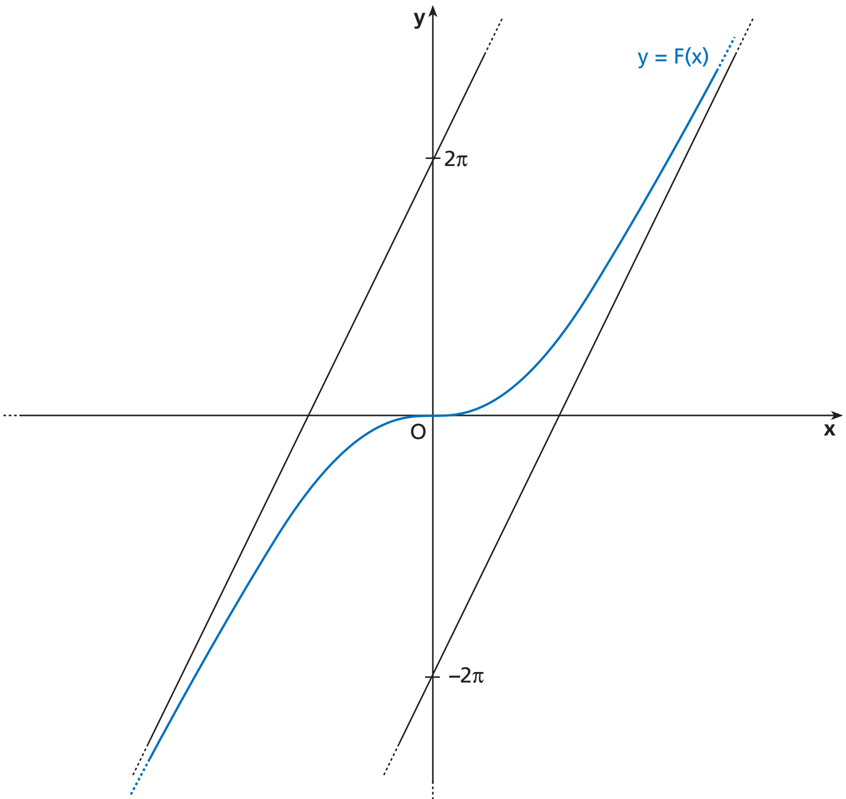
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 4 \operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{4 \operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{x}\right) = 2 = m,$$

$$\lim_{x \to +\infty} [F(x) - 2x] = \lim_{x \to +\infty} \left(2x - 4 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - 2x\right) = -2\pi = q.$$

Pertanto la retta di equazione $y = 2(x - \pi)$ è asintoto obliquo per la funzione a $+\infty$. Essendo la funzione $F(x)$ dispari, si deduce che la retta di equazione $y = 2(x + \pi)$ è asintoto obliquo a $-\infty$.

- $F'(x) = f(x)$ ed $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi $F(x)$ è crescente per ogni x reale.
- $F''(x) = f'(x) \to$ l'origine è un flesso a tangente orizzontale per $F(x)$.

Il grafico di $F(x)$ è il seguente.



c) Per determinare l'area della superficie nel primo quadrante, delimitata dalla curva γ, dall'asse y e dalla retta di equazione $y = 2$ calcoliamo il seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} [2 - f(x)]dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b [2 - f(x)]dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \left(2 - \frac{2x^2}{x^2 + 4}\right)dx = \lim_{b \to +\infty} 2\int_0^b \left(1 - \frac{x^2}{x^2 + 4}\right)dx =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} 2\int_0^b \frac{4}{x^2 + 4}dx = \lim_{b \to +\infty} 8\int_0^b \frac{dx}{x^2 + 4} = \lim_{b \to +\infty} 8\left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\right]_0^b = \lim_{b \to +\infty} 4\left[\operatorname{arctg} \frac{b}{2}\right] = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

d) Utilizzando il metodo dei trapezi (dividendo in 4 parti uguali l'intervallo di integrazione) otteniamo la seguente approssimazione dell'integrale $\int_0^2 f(x)\,dx$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{f(a) + f(x_1)}{2} \cdot h + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot h + \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} \cdot h + \frac{f(x_3) + f(b)}{2} \cdot h =$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(b)\right].$$

Quindi:

$$\int_0^2 f(x)\,dx \simeq \frac{0,5}{2}\left[f(0) + 2f(0,5) + 2f(1) + 2f(1,5) + f(2)\right] \simeq 0,8688235294.$$

Il valore esatto dell'integrale è il seguente:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \left[2x - 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}\right]_0^2 = 4 - \pi \simeq 0,8584073464.$$

Risoluzione dei quesiti

1 Possiamo riscrivere la cubica nel seguente modo:

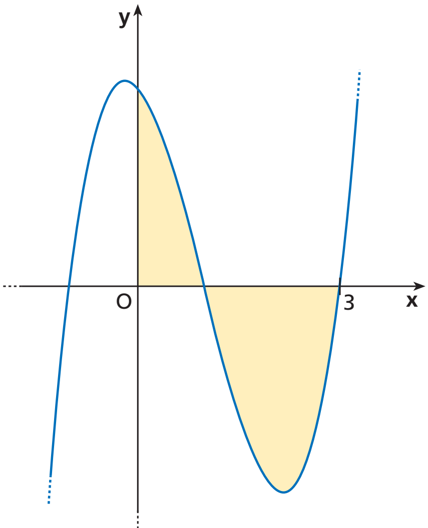
$$y = x^2(x-3) - (x-3) = (x-3)(x^2-1).$$

Quindi la funzione interseca l'asse delle ascisse nei punti di ascissa $x = \pm 1$ e $x = 3$.

La derivata prima è $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$, che si annulla in $x = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$: sono le ascisse dei punti di minimo e di massimo.

La derivata seconda è $f''(x) = 6x - 6$, che si annulla in $x = 1$. Quindi $(1; 0)$ è il punto di flesso.

Il grafico della funzione è quello riportato in figura.



Per determinare l'area richiesta calcoliamo il seguente integrale definito:

$$S = \int_0^3 |f(x)|\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 -f(x)\,dx = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx - \int_1^3 (x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_1^3 =$$

$$= \frac{7}{4} - (-4) = \frac{23}{4}.$$

---

2 **a)** Calcoliamo l'integrale indefinito $\int (2-x)\cos x\,dx$, per parti:

$$\int (2-x)\cos x\,dx = (2-x)\,\mathrm{sen}\,x - \int -\mathrm{sen}\,x\,dx = (2-x)\,\mathrm{sen}\,x - \cos x + c, \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo ora l'integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-x)\cos x\,dx = \left[(2-x)\,\mathrm{sen}\,x - \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 - \frac{\pi}{2} - (-1) = 3 - \frac{\pi}{2}.$$

b) Calcoliamo l'integrale definito $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{x}\,dx$.

Procediamo per sostituzione.

Poniamo $t = \sqrt{x}$ da cui $x = t^2$ e $dx = 2t\,dt$. Se $x = 1$, abbiamo $t = 1$ e se $x = 4$, $t = 2$.

Di conseguenza otteniamo:

$$\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{x}dx = \int_1^2 \frac{1-t}{t^2}2t\,dt = 2\int_1^2 \frac{1-t}{t}dt = 2\big[\ln|t|-t\big]_1^2 = 2\big[(\ln 2-2)-(-1)\big] = 2(\ln 2-1).$$

c) Calcoliamo l'integrale definito $\int_0^1 \frac{1}{4-x^2}dx$.

Poniamo:

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{2+x} = \frac{A(2+x)+B(2-x)}{(2-x)(2+x)} = \frac{(A-B)x+2A+2B}{(2-x)(2+x)}$$

da cui otteniamo: $\begin{cases} A-B=0 \\ 2A+2B=1 \end{cases} \to \begin{cases} A=B \\ A=B=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Pertanto, abbiamo:

$$\int_0^1 \frac{1}{4-x^2}dx = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 \frac{1}{2-x}dx + \int_0^1 \frac{1}{2+x}dx\right) = \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{4}(\ln 3-\ln 1) = \frac{\ln 3}{4}.$$

---

3 Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione $F(x) = \int_0^x \frac{2-3t+t^2}{t^4+1}dt$ è derivabile e ha per derivata la funzione integranda: $F'(x) = \frac{2-3x+x^2}{x^4+1}$.

Studiamo il suo segno:

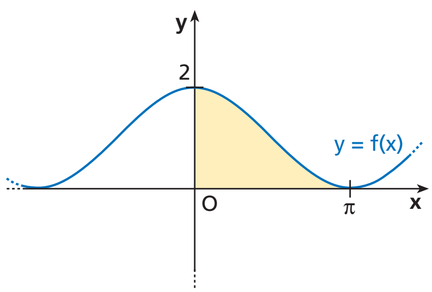
$F'(x) > 0 \to 2-3x+x^2 > 0 \to x < 1 \vee x > 2$.

Quindi $F(x)$ è decrescente in $1 < x < 2$ e crescente per $x < 1$ o per $x > 2$.

$x = 1$ è un punto di massimo relativo e $x = 2$ è un punto di minimo relativo.

---

4 Disegniamo il grafico della funzione $f(x) = 1+\cos x$.



Esplicitiamo la variabile x in funzione della variabile y:

$y = 1+\cos x \to \cos x = y-1 \to x = \arccos(y-1)$, $x \in [0;\pi]$ e $y \in [0;2]$.

Il volume richiesto è dato dall'integrale seguente:

$$V = \pi\int_0^2 [\arccos(y-1)]^2 dy.$$

Calcoliamo inizialmente l'integrale indefinito procedendo prima per sostituzione e poi due volte per parti:

$t = \arccos(y-1) \to y = \cos t + 1$, $dy = -\operatorname{sen} t\,dt$;

$$\int[\arccos(y-1)]^2 dy = \int t^2(-\operatorname{sen} t)\,dt = t^2\cos t - \int 2t\cos t\,dt =$$

$$= t^2\cos t - 2\left[t\operatorname{sen} t - \int \operatorname{sen} t\,dt\right] = t^2\cos t - 2t\operatorname{sen} t - 2\cos t + c.$$

Per calcolare l'integrale definito, stabiliamo come sono cambiati gli estremi d'integrazione dopo la sostituzione:

$y = 0 \to t = \pi$;

$y = 2 \to t = 0$.

Pertanto l'integrale definito è

$$V = \pi\int_0^2 [\arccos(y-1)]^2 dy = \pi\int_\pi^0 t^2(-\operatorname{sen} t)\,dt = \pi\left[t^2\cos t - 2t\operatorname{sen} t - 2\cos t\right]_\pi^0 =$$
$$= \pi(-2+\pi^2-2) = \pi^3 - 4\pi.$$

---

5 Il valor medio è dato dalla formula:

$$V_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 e^x(1-x)\,dx.$$

Calcoliamo l'integrale indefinito per parti:

$$\int e^x(1-x)\,dx = (1-x)e^x - \int -e^x\,dx = (1-x)e^x + e^x + c = (2-x)e^x + c.$$

In definitiva, abbiamo:

$$V_m = \int_0^1 e^x(1-x)\,dx = \left[(2-x)e^x\right]_0^1 = e-2.$$

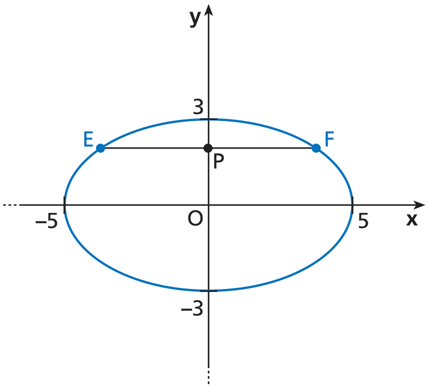
---

6 L'equazione data rappresenta un'ellisse di semiasse maggiore $a = 5$ e semiasse minore $b = 3$.

Considerato un punto P sull'asse delle ordinate, con $-3 \le y \le 3$, calcoliamo la lunghezza della corda EF ottenuta intersecando l'ellisse con una retta parallela all'asse x e passante per P.
Determiniamo le coordinate dei punti E e F:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \to x = \pm\frac{5}{3}\sqrt{9-y^2};$$

$$E\left(-\frac{5}{3}\sqrt{9-y^2};\, y\right), F\left(\frac{5}{3}\sqrt{9-y^2};\, y\right) \to \overline{EF} = \frac{10}{3}\sqrt{9-y^2}.$$



Calcoliamo il volume del solido utilizzando il «metodo delle sezioni» (le sezioni del solido sono dei quadrati di lato EF al variare del punto P sull'asse minore dell'ellisse), tenendo conto della simmetria dell'ellisse rispetto all'asse y e rispetto all'asse x:

$$V = \int_{-3}^{3} \overline{EF}^2 dy = 2\int_0^3 \overline{EF}^2 dy = 2\int_0^3 \frac{100}{9}(9-y^2)\,dy = \frac{200}{9}\left[9y - \frac{y^3}{3}\right]_0^3 = 400.$$