Risoluzione della verifica IN UN'ORA - SECONDA PROVA

1 **a)** $f(x)$ è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Calcoliamo la derivata prima: $f'(x) = x^2 + 2kx - k$.

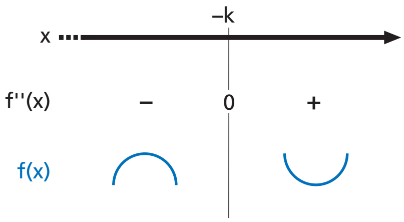
La funzione non ha né massimi né minimi relativi se la derivata prima non cambia mai segno, quindi se il discriminante è non positivo:

$$\frac{\Delta}{4} = k^2 + k \le 0 \rightarrow -1 \le k \le 0.$$

b) Calcoliamo la derivata seconda e studiamo il suo segno:

$f''(x) = 2x + 2k$,

$f''(x) > 0 \rightarrow 2x + 2k > 0 \rightarrow x > -k$.



Quindi $\forall k \in \mathbb{R}$, la funzione ha un punto di flesso di ascissa $x = -k$.

c) Per studiare la posizione della tangente inflessionale, calcoliamo il suo coefficiente angolare, cioè il valore della derivata prima nel punto di flesso:

$f'(-k) = -k^2 - k$.

La tangente inflessionale è quindi parallela all'asse delle ascisse per $k = 0 \lor k = -1$, e obliqua per i restanti valori di k.

In particolare la tangente è crescente se $-1 < k < 0$ e decrescente se $k < -1 \lor k > 0$.

---

2 Dopo aver osservato che $x = 1$ non è mai soluzione dell'equazione, dividiamo per $\ln x$ e isoliamo il parametro. Discutiamo graficamente le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y = k \\ y = \dfrac{x^3}{\ln x} \end{cases}$$

Rappresentiamo la funzione trascendente, dopo averne studiato gli elementi fondamentali.

- Dominio: $D =]0;1[\cup]1;+\infty[$.
- Segno: $f(x) > 0$ se $x > 1$.
- Non interseca gli assi.
- Limiti agli estremi del dominio:
  - $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{x^3}{\ln x} = 0^-$;
  - $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3}{\ln x} = \infty \rightarrow$ la retta di equazione $x = 1$ è asintoto verticale;
  - per il teorema di De L'Hospital, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{\ln x} = +\infty$.
- Derivata prima: $f'(x) = \dfrac{x^2(\ln x - 1)}{\ln^2 x}$.

  Anche il dominio di $f'(x)$ è D. Studiamo il suo segno:

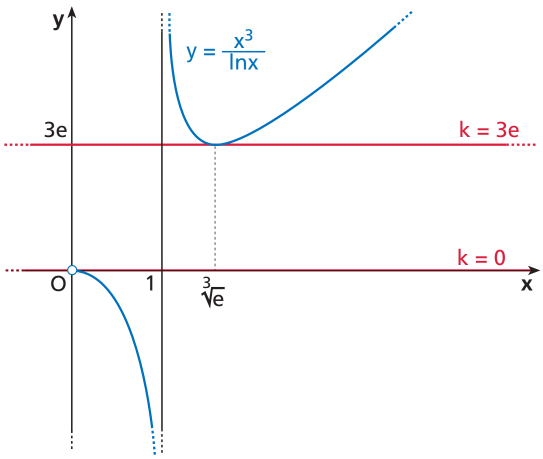
  $f'(x) > 0 \rightarrow x > \sqrt[3]{e}$ quindi $x = \sqrt[3]{e}$ è punto di minimo relativo con $f(\sqrt[3]{e}) = 3e$.

Tracciamo il grafico della funzione.

Per via grafica troviamo che il sistema ammette:

1 soluzione per $k < 0$,

2 soluzioni per $k \geq 3e$.



3 Per determinare i valori dei parametri a, b per i quali $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + ax + b}$ ha un massimo relativo in $(1; -2)$ possiamo procedere in due modi diversi.

Primo metodo

Imponiamo che le coordinate del vertice della parabola $y = x^2 + ax + b$ siano $\left(1; -\dfrac{1}{2}\right)$ e, risolvendo il sistema, otteniamo:

$$\begin{cases} -\dfrac{a}{2} = 1 \\ 1 + a + b = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

La funzione richiesta è pertanto $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + \dfrac{1}{2}} = \dfrac{2}{2x^2 - 4x + 1}$.

Secondo metodo

Imponiamo che la derivata prima della funzione si annulli in $x = 1$, che la funzione passi per il punto $(1; -2)$ e verifichiamo che il punto dato sia di massimo per la funzione risultante.

$$f'(x) = \frac{-2x - a}{(x^2 + ax + b)^2};$$

$$\begin{cases} f(1) = -2 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1 + a + b} = -2 \\ \dfrac{-2 - a}{(1 + a + b)^2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{1}{2} \\ a = -2 \end{cases} \rightarrow f(x) = \frac{2}{2x^2 - 4x + 1}.$$

Verifichiamo che il punto sia di massimo per la funzione, studiando il segno della derivata prima.

$$f'(x) = \frac{-2x - a}{(x^2 + ax + b)^2} = \frac{4(-x + 1)}{(2x^2 - 4x + 1)^2} > 0 \rightarrow -x + 1 > 0 \rightarrow x < 1.$$

Il punto è effettivamente di massimo per la funzione.
Determiniamo il dominio della funzione e calcoliamo i limiti agli estremi.

$$2x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 2}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow D = \mathbb{R} - \left\{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right\};$$

$$\lim_{x \to 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) = \infty \rightarrow \text{le rette } x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ sono asintoti verticali per } f.$$

Poiché la funzione è illimitata sia inferiormente che superiormente, non esistono estremi assoluti.

Completiamo lo studio della funzione e tracciamo il suo grafico.

- $D = \mathbb{R} - \left\{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$;
- $f(x) > 0 \to 2x^2 - 4x + 1 > 0 \to x < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x > 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- $x = 0 \to y = 2$; non ci sono intersezioni con l'asse x;
- $\lim_{x \to \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\pm}} f(x) = \mp\infty$ e $\lim_{x \to \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\pm}} f(x) = \pm\infty$;
- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \to y = 0$ asintoto orizzontale;
- $f'(x) = \frac{4(-x+1)}{(2x^2 - 4x + 1)^2} > 0 \to x < 1$,

  $x = 1$ punto di massimo relativo di ordinata $f(1) = -2$;
- $f''(x) = \frac{-4(2x^2 - 4x + 1)^2 - 4(1-x)2(2x^2 - 4x + 1)(4x - 4)}{(2x^2 - 4x + 1)^4} =$

  $= \frac{4(6x^2 - 12x + 7)}{(2x^2 - 4x + 1)^3} > 0 \to 2x^2 - 4x + 1 > 0.$

  La derivata seconda ha lo stesso segno della funzione, quindi f è convessa dove è positiva e concava dove è negativa.