Risoluzione della verifica IN UN'ORA - PRIMA PROVA

1 La funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + 2px + q}{x^2 + 1}$ ha dominio $\mathbb{R}$ ed è continua in ogni suo punto, per qualsiasi valore dei parametri.

a) Poiché $f(x)$ è derivabile, determiniamo i punti a tangente orizzontale calcolando la derivata prima e ponendola uguale a 0.

$$f'(x) = \frac{(2x + 2p)(x^2 + 1) - 2x(x^2 + 2px + q)}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{2[px^2 + (q - 1)x - p]}{(x^2 + 1)^2},$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -\frac{2[px^2 + (q - 1)x - p]}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow px^2 + (q - 1)x - p = 0.$$

L'equazione ha discriminante $\Delta = (q - 1)^2 + 4p^2$ che è somma di due quadrati e quindi sempre positivo $\forall p \neq 0$ e $\forall q \in \mathbb{R}$.

Ricordando che nell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ il prodotto delle soluzioni è $\frac{c}{a}$, nel nostro caso è:

$x_1 x_2 = \dfrac{-p}{p} = -1$ come dovevamo dimostrare.

b) Sostituiamo nell'equazione della funzione le coordinate di A e scriviamo la condizione sulla derivata:

$$f(1) = 2 \quad \rightarrow \quad 2 = \frac{1 + 2p + q}{2} \quad \rightarrow \quad 2p + q = 3;$$

$$f'(2) = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{2[4p + (q - 1)2 - p]}{25} = 0 \quad \rightarrow \quad 3p + 2q = 2.$$

Risolviamo il sistema: $\begin{cases} 2p + q = 3 \\ 3p + 2q = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p = 4 \\ q = -5 \end{cases}$

c) Sostituendo i valori di p e q otteniamo la funzione da studiare: $f(x) = \dfrac{x^2 + 8x - 5}{x^2 + 1}$.

- $D = \mathbb{R}$.
- $f(-x) \neq \pm f(x) \rightarrow$ non ci sono simmetrie rispetto all'asse y e rispetto all'origine.
- Segno: $f(x) > 0 \rightarrow x^2 + 8x - 5 > 0 \rightarrow x < -4 - \sqrt{21} \vee x > -4 + \sqrt{21}$.
- Intersezioni con gli assi: $(-4 \pm \sqrt{21}; 0)$; $(0; -5)$.
- Limiti agli estremi del dominio:

  $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 8x - 5}{x^2 + 1} = 1 \rightarrow$ la retta di equazione $y = 1$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow \pm\infty$.

- Derivata prima: $f'(x) = \dfrac{4(-2x^2 + 3x + 2)}{(x^2 + 1)^2}$; $f'(x) > 0$ per $-\frac{1}{2} < x < 2$.

  La funzione è decrescente per $x < -\frac{1}{2} \vee x > 2$, crescente per $-\frac{1}{2} < x < 2$.

  Pertanto:

  $x = -\frac{1}{2}$ è punto di minimo relativo e assoluto con $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -7$;

  $x = 2$ è punto di massimo relativo e assoluto con $f(2) = 3$.

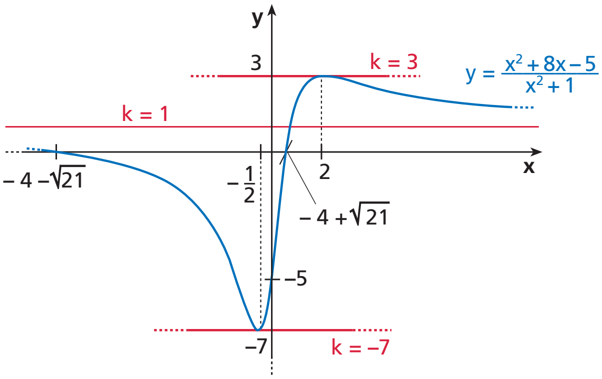
Tracciamo il grafico osservando che la presenza dell'asintoto orizzontale, di un massimo e di un minimo suggeriscono l'esistenza di tre flessi: il primo con ascissa $x_1 < -\frac{1}{2}$, il secondo con ascissa $-\frac{1}{2} < x_2 < 2$, il terzo con ascissa $x_3 > 2$.

Le soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ coincidono con le intersezioni della curva $y = f(x)$ con la retta $y = k$.

Quindi abbiamo:

1 soluzione per $k = 1$,

2 soluzioni per $-7 \leq k < 1 \vee 1 < k \leq 3$.



2 Per rispondere al test dobbiamo analizzare singolarmente ognuna delle opzioni.

A VERA
La concavità di una funzione dipende dal segno della sua derivata seconda, calcoliamola:

$f'(x) = 4ax^3 + b \rightarrow f''(x) = 12ax^2$.

Il segno della derivata seconda dipende dal segno di a.

In particolare: se $a < 0$, $y'' < 0$ e la funzione ha la concavità rivolta verso il basso; se $a > 0$, $y'' > 0$ e la funzione ha la concavità rivolta verso l'alto.

B FALSA
Sostituiamo $a = -2b$ nell'equazione della derivata prima e poniamola uguale a 0:

$$f'(x) = 4ax^3 + b = -8bx^3 + b = b(1-8x^3) = b(1-2x)(1+4x^2+2x),\ f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$x = \frac{1}{2}$ è un punto stazionario, verifichiamo che sia un massimo studiando il segno della derivata prima.

$f'(x) > 0 \rightarrow b(1-2x)(1+4x^2+2x) > 0 \rightarrow b(1-2x) > 0$.

Ci sono due casi:

se $b > 0$, allora $x = \frac{1}{2}$ è un punto di massimo relativo;

se $b < 0$, allora $x = \frac{1}{2}$ è un punto di minimo relativo.

Quindi non è sempre vero che $x = \frac{1}{2}$ è un punto di massimo, dipende dal segno di b.

C FALSA
La funzione è derivabile in tutto il suo dominio, quindi i punti di massimo o di minimo sono necessariamente punti stazionari, cioè zeri della derivata prima che non dipende dal parametro c.

D FALSA
Sostituiamo i valori $a = 1, b = -4, c = 0$ nell'equazione della derivata prima e studiamo il suo segno.

$f'(x) = 4ax^3 + b = 4x^3 - 4 = 4(x^3-1) = 4(x-1)(x^2+x+1)$,

$f'(x) \geq 0 \rightarrow x \geq 1$.

Quindi la funzione ha un punto di minimo relativo in $x = 1$ e non ha un punto di massimo relativo in $x = 0$.

E FALSA
La derivata seconda è $f''(x) = 12ax^2$ e il suo segno, fissato il parametro a, è costante in $\mathbb{R}$. Quindi non vi sono punti di flesso.

---

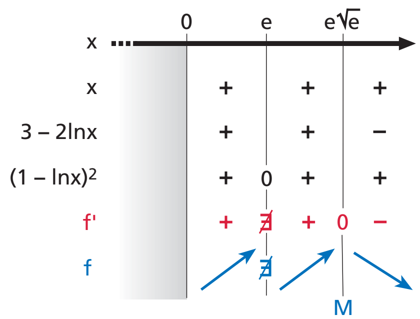
3 **a)** Studiamo il grafico di $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - \ln x}$.

- Dominio: $D =]0; e[\cup]e; +\infty[$.
- Segno: $f(x) > 0 \rightarrow 1 - \ln x > 0 \rightarrow \ln x < 1 \rightarrow 0 < x < e$.
- Non ci sono intersezioni con gli assi.
- Limiti agli estremi del dominio:
  - utilizzando il teorema di De L'Hospital, abbiamo che $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{1 - \ln x} = -\infty$ ma $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, quindi non esiste un asintoto obliquo;
  - $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{x^2}{1 - \ln x} = \infty \rightarrow x = e$ è asintoto verticale;
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2}{1 - \ln x} = 0^+$.
- Derivata prima: $f'(x) = \dfrac{x(3 - 2\ln x)}{(1 - \ln x)^2}$.

  Il dominio di $f'(x)$ coincide con il dominio D di $f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0^+$.

  Studiamo il segno della derivata:

$$f'(x) > 0 \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3 - 2\ln x > 0 \\ (1 - \ln x)^2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < e\sqrt{e} \\ \forall x \in D \end{cases}$$

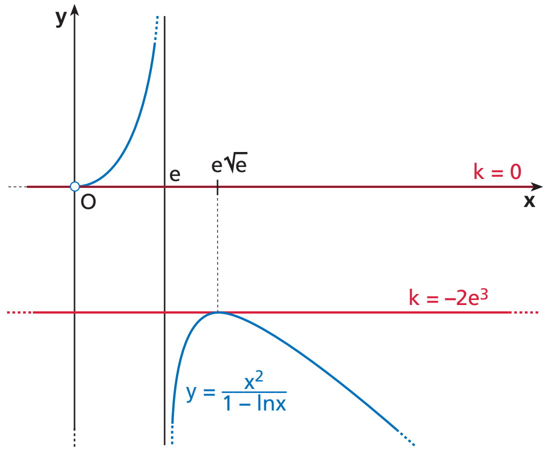


  Dal quadro dei segni otteniamo che $x = e\sqrt{e}$ è punto di massimo relativo con $f(e\sqrt{e}) = -2e^3$.

- Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{2\ln^2 x - 7\ln x + 7}{(1 - \ln x)^3}$.

  Il numeratore è un'espressione logaritmica i cui zeri possono essere ricavati mediante un'incognita ausiliaria. Ponendo $t = \ln x$, si trova $2t^2 - 7t + 7$ che ha sempre segno positivo, quindi il segno della derivata seconda dipende solo dal segno del denominatore, e quindi coincide con il segno della funzione. Pertanto $f(x)$ ha concavità rivolta verso l'alto per $0 < x < e$.

Tracciamo il grafico.



b) La funzione $g(x) = f(|\, x\,|)$ è una funzione pari; costruiamo il grafico a partire dalla funzione $f(x)$ prolungandola in modo simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.