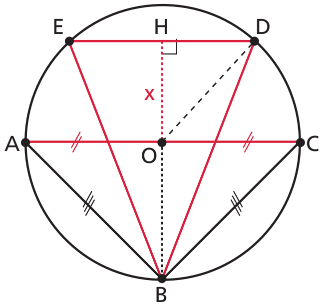
Risoluzione della verifica IN UN'ORA - SECONDA PROVA

1 Costruiamo la figura.



Scegliamo la variabile $\overline{OH} = x$, rispetto alla quale valgono le limitazioni $0 \leq x \leq r$. Osservato che il triangolo DEB è isoscele, esprimiamo gli elementi della figura in funzione della variabile:

$$\overline{BH} = x + r; \qquad \overline{DE} = 2\overline{DH} = 2\sqrt{r^2 - x^2};$$

$$\overline{BE} = \overline{BD} = \sqrt{\overline{BH}^2 + \overline{DH}^2} = \sqrt{(x+r)^2 + (r^2 - x^2)} = \sqrt{2rx + 2r^2}.$$

a) Determiniamo l'espressione del perimetro in funzione di x.

$$2p(x) = \overline{DE} + 2\overline{BD} = 2\sqrt{r^2 - x^2} + 2\sqrt{2rx + 2r^2};$$

$$p(x) = \sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{2rx + 2r^2}, \qquad x \in [0; r].$$

La funzione $p(x)$ è positiva e continua nell'intervallo $x \in [0; r]$.

$$p'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{r}{\sqrt{2rx + 2r^2}}.$$

$p(x)$ è derivabile nei suoi punti interni quindi raggiunge il massimo agli estremi oppure in uno dei punti stazionari.

$$p'(x) = 0 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{2rx + 2r^2}}.$$

Eliminiamo i denominatori ed eleviamo al quadrato i due membri:

$$x^2(2rx + 2r^2) = r^2(r^2 - x^2) \rightarrow 2rx^2(x + r) = r^2(r - x)(r + x) \rightarrow (x + r)(2x^2 + rx - r^2) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x + r = 0 \ \vee \ 2x^2 + rx - r^2 = 0 \rightarrow x = -r \text{ (non accettabile)} \ \vee \ x = \frac{1}{2}r \text{ (accettabile)}.$$

$$p\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}r \ \text{ e } \ p(0) = (1 + \sqrt{2})r, \ p(r) = 2r,$$

perciò il perimetro è massimo per $x = \frac{1}{2}r$ e vale $2p\left(\frac{r}{2}\right) = 3\sqrt{3}\,r$.

b) Determiniamo ora l'espressione dell'area del triangolo DEB.

$$s(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{BH} = \overline{HD} \cdot \overline{BH} = \sqrt{r^2 - x^2} \cdot (r + x), \qquad x \in [0; r].$$

La funzione è non negativa, continua nell'intervallo $x \in [0; r]$.
$s(x)$ è derivabile nei suoi punti interni quindi raggiunge il massimo agli estremi oppure in uno dei punti stazionari.

$$s'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (r + x) + \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{-2x^2 - rx + r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

$$s'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 + rx - r^2 = 0.$$

Poiché abbiamo ottenuto la stessa equazione del caso **a)**, la soluzione è $x = \frac{r}{2}$.

Poiché $s\left(\frac{r}{2}\right) = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} \cdot \left(r + \frac{r}{2}\right) = \frac{9}{4}r^2$ e $s(0) = r^2$, $s(r) = 0$,

l'area massima si ottiene per $x = \frac{r}{2}$ e vale $s\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{9}{4}r^2$.

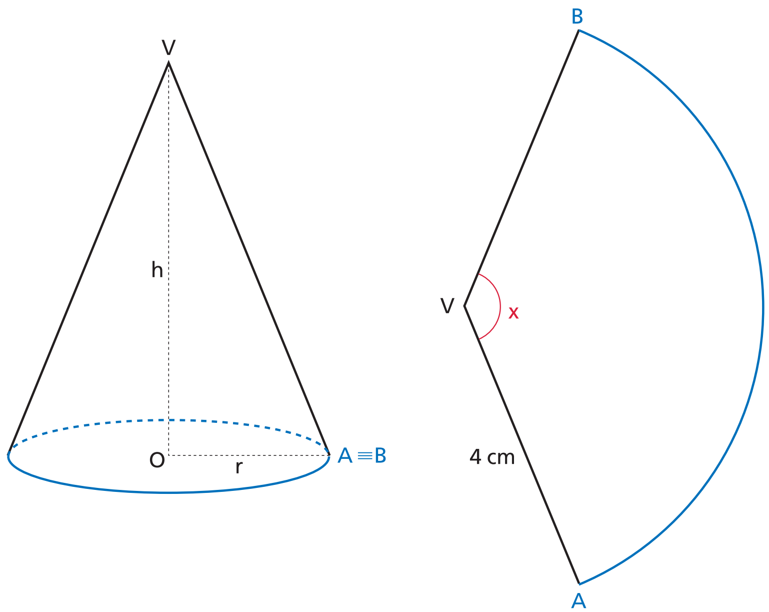
---

2 La funzione $f(x) = e^x - kx$ è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Calcoliamo la derivata prima: $f'(x) = e^x - k$.
$f(x)$ non presenta né massimi né minimi relativi se la derivata prima non cambia segno, ovvero se $k \leq 0$.

---

3 Poiché $A\widehat{V}B = x$, allora $0 \leq x \leq 2\pi$.
Rappresentiamo in figura il cono e lo sviluppo della superficie laterale.



Il volume del cono è $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, dove r è il raggio della circonferenza di base del cono e h è l'altezza.

La lunghezza dell'arco AB del settore circolare coincide con quella della circonferenza di base del cono, $\widehat{AB} = 2\pi r$ quindi $r = \frac{\widehat{AB}}{2\pi}$.

La misura dell'arco di un settore circolare di raggio 4 e angolo al centro x è $4x$, pertanto abbiamo $r = \frac{4x}{2\pi} = \frac{2x}{\pi}$.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo VOA troviamo $h = \sqrt{16 - \frac{4x^2}{\pi^2}} = \frac{2}{\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$.

In definitiva, la funzione da massimizzare è:

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{4x^2}{\pi^2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{4\pi^2 - x^2} = \frac{8x^2}{3\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - x^2}.$$

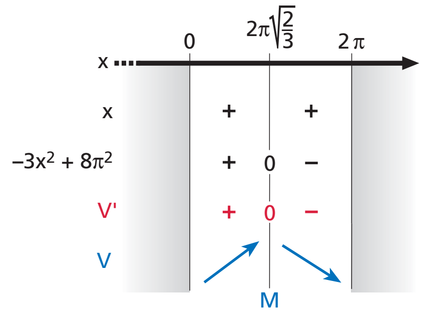
Calcoliamo la derivata:

$$V'(x) = \frac{8}{3\pi^2}\left[2x\sqrt{4\pi^2 - x^2} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}} \cdot (-2x)\right] =$$

$$= \frac{8}{3\pi^2} \cdot \frac{x(-3x^2 + 8\pi^2)}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}.$$

Compiliamo il quadro dei segni.

$$V'(x) > 0 \to \begin{cases} x > 0 \\ -3x^2 + 8\pi^2 > 0 \to -2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}} < x < 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}} \end{cases}$$



La funzione ha un massimo relativo in $x = 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; stabiliamo se è anche un massimo assoluto confrontando i valori assunti da $V(x)$ negli estremi del dominio geometrico del problema:

$$V(0) = 0,\ V(2\pi) = 0,\ V\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{128\pi\sqrt{3}}{27}.$$

Il massimo relativo è anche massimo assoluto.

4 Calcoliamo i limiti destro e sinistro della funzione derivata per x che tende a 0:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \text{ e } \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Quindi $x = 0$ è un punto angoloso.