Risoluzione della verifica IN UN'ORA - PRIMA PROVA

1 **a)** Le funzioni di equazione $y = \dfrac{kx + k}{(k+1)x - 1}$ hanno dominio $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{k+1}\right\}$, $\forall k > 0$.

Ogni funzione è continua e derivabile in tale dominio e il suo grafico è un'iperbole riferita agli asintoti. Le iperboli degeneri sono rette che si ottengono per $k + 1 = 0$, e cioè per $k = -1$, oppure per $k(-1) - k(k+1) = 0$, ossia per $k = 0 \vee k = -2$:

- per $k = -1$ otteniamo la retta di equazione $y = x + 1$;
- per $k = 0$ otteniamo la retta di equazione $y = 0$;
- per $k = -2$ otteniamo la retta di equazione $y = 2$.

Tali valori del parametro non soddisfano le limitazioni imposte dal testo; pertanto nel fascio di funzioni omografiche considerate non c'è alcuna funzione degenere.

b) Per determinare i punti in comune a tutte le funzioni, scriviamo l'equazione raccogliendo il parametro k, dopo aver eliminato il denominatore:

$$k(xy - x - 1) + xy - y = 0.$$

I punti comuni sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} xy - x - 1 = 0 \\ xy - y = 0 \end{cases}, \text{ ovvero } A(-1; 0) \text{ e } B(1; 2).$$

c) Il centro C ha coordinate parametriche $C\left(\dfrac{1}{k+1}; \dfrac{k}{k+1}\right)$.

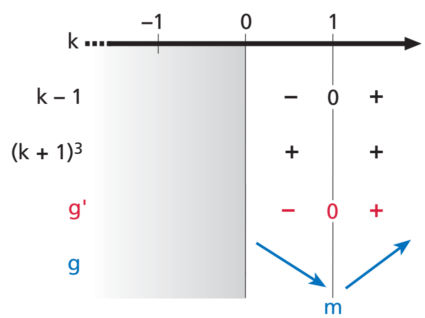
La funzione che esprime il quadrato della distanza del centro dall'origine del sistema di riferimento è:

$$g(k) = \left(\frac{1}{k+1}\right)^2 + \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 = \frac{k^2 + 1}{(k+1)^2}.$$

Calcoliamo la derivata prima e studiamo il suo segno:

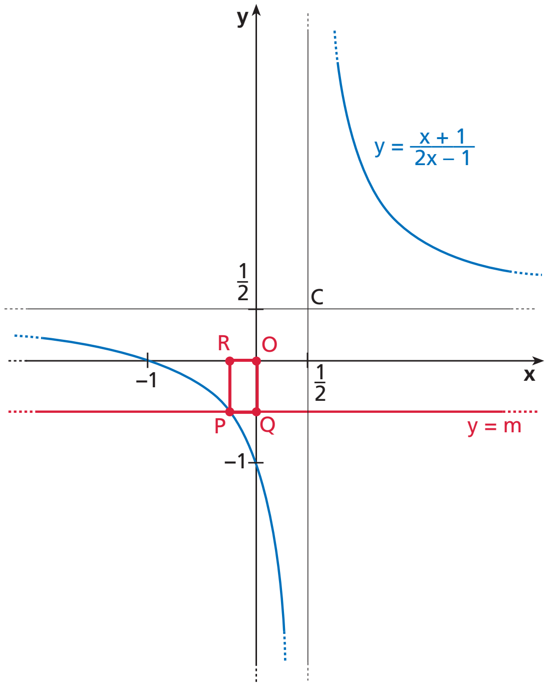
$$g'(k) = \frac{2(k-1)}{(k+1)^3},$$

$$g'(k) > 0 \rightarrow \begin{cases} k - 1 > 0 \rightarrow k > 1 \\ (k+1)^3 > 0 \rightarrow k > -1 \\ k > 0 \end{cases}$$



Il punto di minimo della funzione $g(k)$ è anche punto di minimo della distanza, quindi la distanza minima dall'origine si ottiene ponendo $k = 1$ e risulta, pertanto, $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$ con centro $C\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

d) Tracciamo una retta di equazione $y = m$.



La retta interseca il grafico della funzione nel punto P di coordinate $P\left(\frac{m+1}{2m-1}; m\right)$.

L'area del rettangolo $PQOR$ è data dalla funzione:

$$h(m) = |m| \cdot \left| \frac{m+1}{2m-1} \right| = \frac{m^2+m}{2m-1}$$

nel dominio $]-1; 0[$.

Calcoliamo la derivata prima e studiamo il suo segno.

$$h'(m) = \frac{2m^2-2m-1}{(2m-1)^2},$$

$$h'(m) > 0 \to \begin{cases} 2m^2-2m-1 > 0 \to m < \frac{1-\sqrt{3}}{2} \lor m > \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ (2m-1)^2 > 0 \to \forall m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

m	−1		$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$		0
$2m^2-2m-1$		+	0	−	
$(2m-1)^2$		+		+	
h'		+	0	−	
h		↗	M	↘	

Tenendo conto delle limitazioni del problema, la derivata prima è positiva per $-1 < m < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

L'area massima si ottiene tracciando la retta di equazione $y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

2 Calcoliamo la derivata prima della funzione data:

$$f'(x) = a\cos x - (b-1)\operatorname{sen} x.$$

Sostituiamo nella funzione le coordinate dell'estremo e scriviamo la condizione sulla derivata:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \to a\frac{\sqrt{2}}{2} + (b-1)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \to a + b - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \to a\frac{\sqrt{2}}{2} - (b-1)\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \to a - b + 1 = 0.$$

Risolvendo il sistema si ottiene $a = \frac{\sqrt{2}}{4} \wedge b = \frac{\sqrt{2}}{4} + 1$ e, sostituendo nell'espressione della derivata, troviamo $f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\cos x - \operatorname{sen} x)$.

Stabiliamo la natura dell'estremo applicando due diversi metodi.

Primo metodo.

Calcoliamo la derivata seconda: $f''(x) = -\frac{\sqrt{2}}{4}(\cos x + \operatorname{sen} x)$ e valutiamola in $x = \frac{\pi}{4}$:

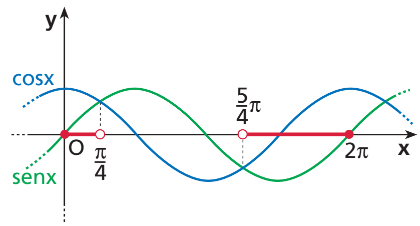
$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} < 0$ quindi la funzione è concava in un intorno dell'estremo; pertanto, $x = \frac{\pi}{4}$ è un punto di massimo relativo.

Secondo metodo.

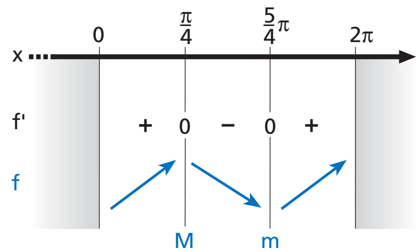
Studiamo il segno della derivata prima.

$$f'(x) > 0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{4}(\cos x - \operatorname{sen} x) > 0 \rightarrow \cos x > \operatorname{sen} x$$

e risolviamo graficamente la disequazione nell'intervallo $[0; 2\pi]$.



Otteniamo che la disequazione è risolta negli intervalli $\left[0; \frac{\pi}{4}\right[$ e $\left]\frac{5}{4}\pi; 2\pi\right]$.



Pertanto, riportando le soluzioni nel quadro dei segni, otteniamo che $x = \frac{\pi}{4}$ è un punto di massimo relativo.

---

3 Esaminiamo le funzioni singolarmente.

A $f(x) = -\sqrt{x^2 - 6x}$ ha dominio $D =]-\infty; 0] \cup [6; +\infty[$, quindi nell'intervallo $]2; 4[$ non è definita.

B $f(x) = e^{x^2 - 6x}$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$. Calcoliamo la derivata e studiamo il suo segno.

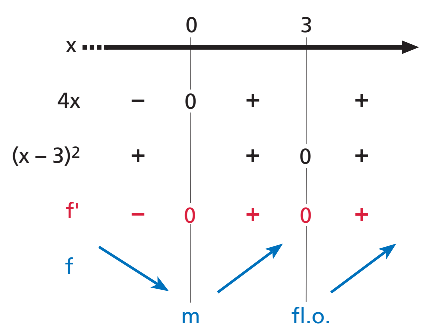
$$f'(x) = e^{x^2-6x}(2x - 6);\ f'(x) = 0 \rightarrow x = 3.$$

L'esponenziale è sempre positivo quindi il segno di $f'(x)$ dipende dal segno di $2x - 6$ che è positivo per $x > 3$ e negativo per $x < 3$. Quindi $x = 3$ è un punto di minimo per la funzione.

C $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2$ è definita e continua su tutto l'asse reale. Calcoliamo la derivata e studiamo il suo segno (figura a lato).

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x = 4x(x-3)^2;$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x(x-3)^2 = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = 3.$$



La funzione ha un minimo in $x = 0$ e un flesso a tangente orizzontale in $x = 3$.

D $f(x) = -(x-3)^4$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$. Calcoliamo la derivata e studiamo il suo segno.

$$f'(x) = -4(x-3)^3.$$

Il segno della derivata è opposto al segno del binomio $(x-3)^2$ quindi è positiva per $x < 3$ e negativa per $x > 3$. Segue che $x = 3$ è un punto di massimo per la funzione.

E $f(x) = (x-3)^3$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$. La derivata è $f'(x) = 3(x-3)^2$ che è sempre non negativa. Quindi $x = 3$ è un punto di flesso a tangente orizzontale.

La risposta esatta è quindi la **D**.