Risoluzione dei problemi

1 Il dominio della generica funzione è: $x \neq a$.

a) Scriviamo l'espressione della funzione in forma di equazione, raccogliendo separatamente i termini contenenti il parametro a e quelli che non lo contengono:

$$y = \frac{ax^2 + (a-1)x}{x-a} \to y(x-a) = ax^2 + (a-1)x \to a(x^2 + x + y) - (xy + x) = 0.$$

Le curve hanno tre punti in comune se l'equazione è soddisfatta indipendentemente dal parametro a:

$$\begin{cases} x^2 + x + y = 0 \\ xy + x = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 + x + y = 0 \\ x(y+1) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 + x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + x + y = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$$

I caso: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

II caso: $\begin{cases} x^2 + x + y = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 + x - 1 = 0 \\ y = -1 \end{cases} \to \begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$

I tre punti comuni sono: $(0; 0)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}; -1\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}; -1\right)$.

b) Se $a = 0$, la funzione si riduce a $y = -1$ e non ammette asintoto obliquo. Consideriamo dunque $a \neq 0$.

Poniamo $y = f(x)$ e, poiché $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$, calcoliamo il coefficiente angolare dell'asintoto:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2 + (a-1)x}{x(x-a)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax + a - 1}{x - a} = a.$$

Il limite per x tendente a $-\infty$ dà lo stesso risultato.
Per la condizione di parallelismo con la retta $x + y = 0$ otteniamo: $m = a = -1$.
Sostituiamo nella funzione e calcoliamo il termine noto:

$$q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-x^2 - 2x}{x+1} + x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2 - 2x + x^2 + x}{x+1} = -1.$$

Il limite per x tendente a $-\infty$ dà lo stesso risultato.

L'asintoto obliquo è la retta di equazione: $x + y + 1 = 0$.

c) Studio della funzione: $y = f(x) = \dfrac{-x^2 - 2x}{x+1}$.

- Dominio: $D = \mathbb{R} - \{-1\}$;
- $f(-x) = \dfrac{-x^2 + 2x}{-x+1}$ quindi la funzione non è né pari né dispari;
- $f(x) > 0 \to \begin{cases} -x^2 - 2x > 0 \to -2 < x < 0 \\ x + 1 > 0 \to x > -1 \end{cases}$
- Intersezioni con gli assi: $(-2; 0)$, $(0; 0)$.
- Per x che tende a $\pm\infty$ abbiamo già ottenuto l'asintoto obliquo $x + y + 1 = 0$.

x		-2		-1		0	
$-x^2 - 2x$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$x + 1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
f	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$

Calcoliamo i limiti destro e sinistro in $x = -1$, sfruttando lo studio del segno:

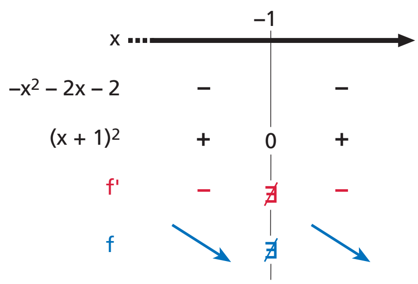
$$\lim_{x \to -1^-} \frac{-x^2 - 2x}{x + 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{-x^2 - 2x}{x + 1} = +\infty.$$

La retta di equazione $x = -1$ è, quindi, asintoto verticale.

- Calcoliamo la derivata prima e studiamo il suo segno.

$$f'(x) = \frac{(-2x - 2)(x + 1) - (-x^2 - 2x)}{(x + 1)^2} =$$

$$= -\frac{x^2 + 2x + 2}{(x + 1)^2}.$$

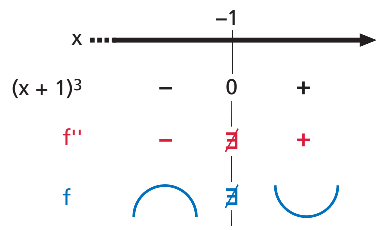


La funzione è decrescente in ciascuno dei due intervalli che compongono il dominio $x < -1$, $x > -1$; non ha massimi e non ha minimi.

- Calcoliamo la derivata seconda e studiamo il suo segno.

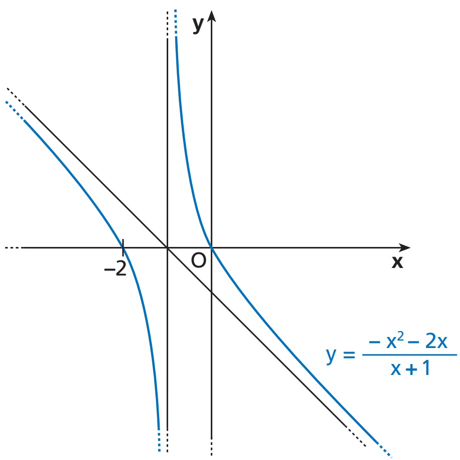
$$f''(x) = -\frac{(2x + 2)(x + 1)^2 - 2(x + 1)(x^2 + 2x + 2)}{(x + 1)^4} =$$

$$= \frac{2}{(x + 1)^3}.$$



La funzione non ha flessi.

Disegniamo infine il grafico della funzione.



d) Scriviamo le equazioni della simmetria centrale di centro $C(-1; 0)$:

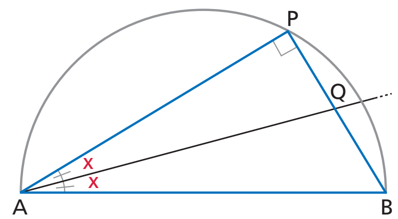
$$\begin{cases} \dfrac{x + x'}{2} = -1 \\ \dfrac{y + y'}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -x' - 2 \\ y = -y' \end{cases}$$

Sostituiamo nell'espressione della funzione:

$$-y' = \frac{-(-x' - 2)^2 - 2(-x' - 2)}{(-x' - 2) + 1} \rightarrow y' = \frac{x'^2 + 2x'}{-x' - 1} = -\frac{x'^2 + 2x'}{x' + 1}.$$

L'espressione ottenuta, a meno degli apici, è identica a quella della funzione di partenza, quindi la funzione è simmetrica rispetto al punto C.

2 Rappresentiamo in figura il problema.



a) Il triangolo APB è inscritto in una semicirconferenza quindi l'angolo in P è retto e l'angolo $P\widehat{A}B$ è compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Per x abbiamo, quindi, le seguenti limitazioni: $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

Il segmento BP è un cateto del triangolo rettangolo APB per cui $\overline{BP} = 2r \operatorname{sen} 2x$.
Il segmento BQ si ottiene sottraendo al segmento BP il segmento PQ, cateto del triangolo rettangolo APQ:

$$\overline{BQ} = 2r \operatorname{sen} 2x - \overline{AP} \operatorname{tg} x = 2r \operatorname{sen} 2x - 2r \cos 2x \operatorname{tg} x.$$

Pertanto abbiamo:

$$y = f(x) = \frac{2r(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x \operatorname{tg} x)}{2r \operatorname{sen} 2x} = \frac{\operatorname{sen} 2x - \cos 2x \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} 2x}.$$

Utilizzando le formule parametriche $\operatorname{sen} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, $\cos 2x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, otteniamo:

$$y = \frac{\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\operatorname{tg} x}{\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{2}, \text{ per } 0 \le x \le \frac{\pi}{4}.$$

b) Studiamo il grafico di f nell'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

- Il dominio della funzione coincide con il dominio della tangente che contiene l'intervallo dato, quindi $D = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.
- La funzione è sempre positiva perché somma di quantità positive.
- Abbiamo già trovato l'intersezione con l'asse y: $(0; 1)$.
  Non ci sono intersezioni con l'asse x.
- Calcoliamo la derivata e studiamo il suo segno.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x},$$

$$f'(x) > 0 \to \operatorname{tg} x > 0 \to \forall x \in D.$$

La funzione è sempre crescente nell'intervallo dato.

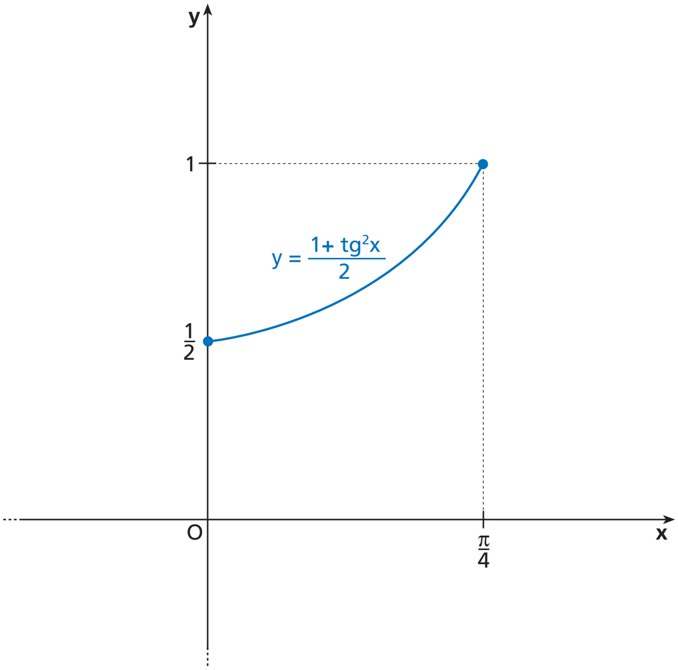
- Calcoliamo la derivata seconda e studiamo il suo segno.

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x - \operatorname{tg} x \cdot 2\cos x \operatorname{sen} x}{\cos^4 x} = \frac{1 - 2\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x},$$

$$f''(x) > 0 \to 1 - 2\operatorname{sen}^2 x > 0 \to -\frac{\sqrt{2}}{2} < \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{2} \to \forall x \in D.$$

Nell'intervallo dato, f ha la concavità sempre rivolta verso l'alto.

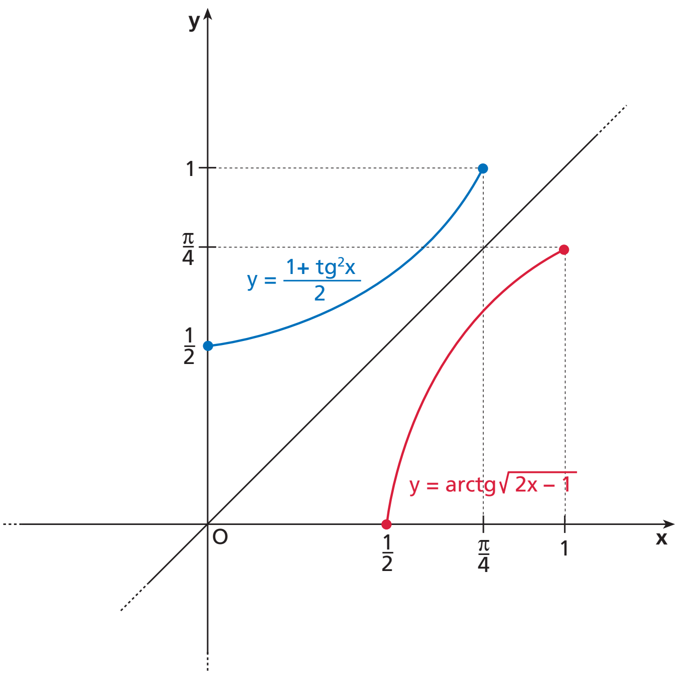
Il grafico della funzione è il seguente.



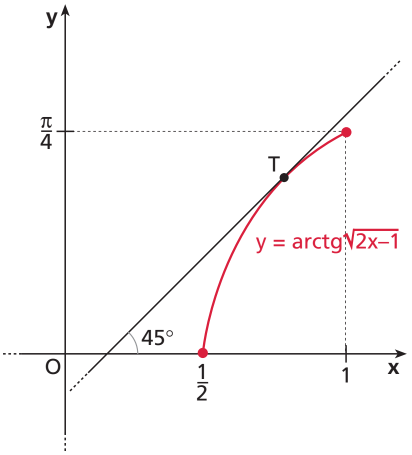
c) La funzione è strettamente crescente nell'intervallo dato e quindi è invertibile.
Determiniamo la funzione inversa g ricavando x in funzione di y:

$$y = \frac{1 + \mathrm{tg}^2 x}{2} \to \mathrm{tg}^2 x = 2y - 1 \to x = g(y) = \mathrm{arctg}\sqrt{2y - 1}.$$

La funzione inversa è, in conclusione, $g(x) = \mathrm{arctg}\sqrt{2x - 1}$ con $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
Ricaviamo il grafico della funzione inversa dal grafico della funzione $f(x)$, mediante una simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.



d) Rappresentiamo graficamente il problema.



La retta tangente il grafico di g in T forma con l'asse x un angolo di 45° se il suo coefficiente angolare è uguale alla tangente di 45°, cioè se $g'(x) = 1$.

Calcoliamo g' e risolviamo l'equazione.

$$g'(x) = \frac{1}{1+(2x-1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x-1}} \cdot 2 =$$

$$= \frac{1}{2x\sqrt{2x-1}},$$

$$g'(x) = 1 \to \frac{1}{2x\sqrt{2x-1}} = 1 \to 1 = 2x\sqrt{2x-1} \to$$

$$\to 1 = 4x^2(2x-1) \to 8x^3 - 4x^2 - 1 = 0.$$

Il polinomio non si scompone nel prodotto di due polinomi di grado minore, cerchiamo quindi la radice applicando uno dei metodi di ricerca approssimata delle radici.
Studiamo approssimativamente la funzione $\varphi(x) = 8x^3 - 4x^2 - 1$ per stabilire in quale intervallo reale è contenuta la radice.

- $\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty \to \varphi$ interseca almeno una volta l'asse x;
- $\varphi'(x) = 24x^2 - 8x = 8x(3x-1) \to \varphi'(x) = 0$ se $x = 0 \vee x = \frac{1}{3}$.

  Abbiamo:
  – φ è crescente in $]-\infty; 0[$;
  – φ ha un massimo in $(0; -1)$;
  – φ è decrescente in $\left]0; \frac{1}{3}\right[$;
  – φ ha un minimo in $\left(\frac{1}{3}; -\frac{31}{27}\right)$;
  – φ è crescente in $\left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$.

Quindi il grafico di φ ha una sola intersezione con l'asse x in $\left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$.

Verifichiamo che l'intervallo $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ contiene la radice cercata e calcoliamola applicando il metodo delle tangenti.

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 4 - 1 = -4 < 0, \varphi(1) = 8 - 4 - 1 = 3 > 0 \to \varphi \text{ interseca l'asse } x \text{ in } \left[\frac{1}{2}; 1\right].$$

Scegliamo come punto di partenza $x = 1$ e costruiamo la tabella.

n	x_n	$\varphi(x_n) = 8x^3 - 4x^2 - 1$	$\varphi'(x_n) = 24x^2 - 8x$
0	1	3	16
1	0,8125	0,6504	9,3478
2	0,7429	0,0725	7,3024
3	0,7330	0,0013	7,0309
4	0,7328	0,0002	

La radice è $x = 0,7328$ con un errore di 0,001.

Risoluzione dei quesiti

1 Per definizione, x è un punto stazionario se $f'(x) = 0 \to 4ax^3 + 3bx^2 = 0 \to x^2(4ax + 3b) = 0$.

Ci sono due soluzioni per ogni a, b reali non nulli: $x = 0 \vee x = -\frac{3b}{4a}$.

Per definizione x è un flesso se $f''(x) = 0 \to 12ax^2 + 6bx = 0 \to 6x(2ax + b) = 0$.

Per ogni a, b reali non nulli ci sono due soluzioni: $x = 0 \vee x = -\frac{b}{2a}$.

Il punto di ascissa $x = 0$ verifica entrambe le condizioni quindi $(0; c)$ è punto di flesso con tangente orizzontale. Osserviamo che se fosse $b = 0$ i tre punti coinciderebbero.

$(0; -1)$ è punto di flesso $\to f(0) = -1 \to c = -1$.

$(1; 0)$ è punto di flesso $\to -\frac{b}{2a} = 1$ e $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0 \to$

$$\to \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ a\left(-\frac{b}{2a}\right)^4 + b\left(-\frac{b}{2a}\right)^3 - 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} b = -2a \\ a + b - 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Sostituiamo nell'espressione della funzione i valori trovati e otteniamo $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 1$.

---

2 Calcoliamo la derivata seconda di $f(x) = a + e^x(bx + c)$.

$f'(x) = e^x(bx + c) + be^x = e^x(bx + b + c)$,

$f''(x) = e^x(bx + b + c) + be^x = e^x(bx + 2b + c)$.

La funzione ha un flesso di ascissa $x = 1$ se $f''(1) = 0$, da cui troviamo:

$e(b + 2b + c) = 0 \to c = -3b$.

La funzione ha in $x = 1$ la tangente di equazione $y = -ex - e$ se $f'(1) = -e$ e $f(1) = -2e$, da cui troviamo:

$$\begin{cases} e(b + b + c) = -e \to 2b + c = -1 \to c = -1 - 2b \\ a + e(b + c) = -2e \end{cases}$$

Dalle due condizioni sul parametro c otteniamo: $-3b = -1 - 2b \to b = 1 \to c = -3$ e, sostituendo nella seconda equazione del sistema, troviamo:

$a + e(1 - 3) = -2e \to a - 2e = -2e \to a = 0$.

Sostituendo nell'espressione della funzione abbiamo $f(x) = e^x(x - 3)$.

---

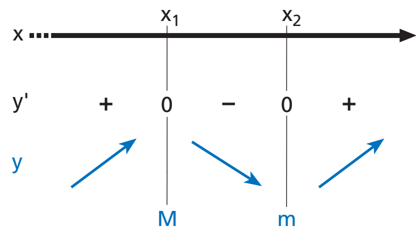
3 $f(x)$ è una funzione polinomiale di terzo grado quindi continua e derivabile in $\mathbb{R}$.

a) La derivata prima $y' = 3x^2 + 2px + 1$ è un polinomio di secondo grado. La funzione è quindi dotata di un massimo e di un minimo se la derivata ha due zeri distinti.

Pertanto deve essere: $\frac{\Delta}{4} > 0 \to p^2 - 3 > 0 \to p < -\sqrt{3} \vee p > \sqrt{3}$.

Compiliamo il quadro dei segni di y' nel caso in cui $\frac{\Delta}{4} > 0$, dove abbiamo indicato con x_1 e x_2 le due radici distinte della derivata.

Osserviamo che y risulta crescente con un flesso orizzontale se $\frac{\Delta}{4} = 0$ e sempre crescente se $\frac{\Delta}{4} < 0$.



b) Studiamo la derivata seconda $y'' = 6x + 2p$.

$y'' = 0$ se $x = -\frac{p}{3}$, la derivata seconda è negativa per $x < -\frac{p}{3}$ e positiva per $x > -\frac{p}{3}$, $\forall p \in \mathbb{R}$.

Le coordinate del flesso sono: $x = -\frac{p}{3}$, $y = -\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{9}p^3 - \frac{1}{3}p - 1 = \frac{2}{27}p^3 - \frac{1}{3}p - 1$ e le equazioni parametriche del luogo da determinare sono:

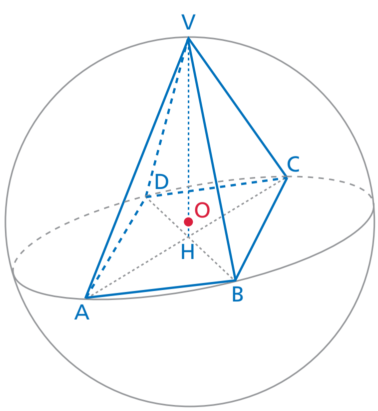
$$\begin{cases} x = -\dfrac{p}{3} \\ y = \dfrac{2}{27}p^3 - \dfrac{1}{3}p - 1 \end{cases}$$

Eliminiamo il parametro e determiniamo l'equazione cartesiana:

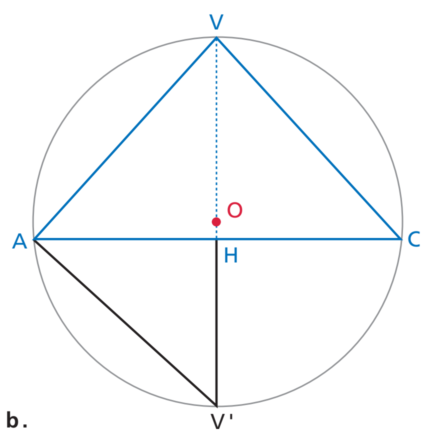
$$\begin{cases} p = -3x \\ y = \dfrac{2}{27}(-3x)^3 - \dfrac{1}{3}(-3x) - 1 \end{cases} \rightarrow \quad y = -2x^3 + x - 1.$$

---

4 Sia $ABCDV$ la piramide regolare di base quadrata $ABCD$ e vertice V inscritta nella sfera di raggio r (figura a).



a.



b.

Poniamo $\overline{VH} = x$, con $x \in [0; 2r]$.
Analizzando la sezione del solido nel piano VAC (figura b) e applicando il secondo teorema di Euclide al triangolo VAV', calcoliamo la diagonale di base:

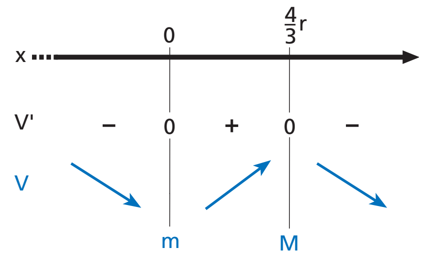
$$\overline{HV'} = 2r - x \rightarrow \overline{AH}^2 = \overline{HV} \cdot \overline{HV'} = x(2r - x) \text{ e } \overline{AC} = 2\overline{AH} = 2\sqrt{x(2r - x)}.$$

Ne segue $\overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2x(2r - x)}$.

Ricaviamo il volume della piramide:

$$V(x) = \frac{1}{3}\overline{AB}^2\,\overline{VH} = \frac{2}{3}x^2(2r - x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}rx^2, \text{ con } 0 \leq x \leq 2r.$$

La funzione soddisfa il teorema di Rolle in $[0; 2r]$, quindi la derivata prima si annulla in almeno un punto interno all'intervallo. Poiché la funzione è positiva e $V(0) = V(2r) = 0$, il massimo assoluto è da cercarsi fra quelli previsti dal teorema.



$$V'(x) = -2x^2 + \frac{8}{3}rx,$$

$$V'(x) = 0 \rightarrow -2x^2 + \frac{8}{3}rx = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = \frac{4}{3}r.$$

Il volume massimo si ha per $x = \frac{4}{3}r$ e vale $V_{\max} = V\left(\frac{4}{3}r\right) = \frac{64}{81}r^3$.

5 Il dominio dell'equazione è: $x > 0$.
Scrivendo l'equazione nella forma equivalente $\operatorname{arctg} x - \ln x = 0$ notiamo che le sue soluzioni coincidono con gli zeri della funzione $y = \operatorname{arctg} x - \ln x$, con $x > 0$.
La funzione è continua e la sua derivata prima vale $y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-x^2+x-1}{x(1+x^2)}$.

Nel dominio il denominatore è positivo, il numeratore è negativo, quindi $y' < 0 \; \forall x > 0$ e la funzione è monotòna decrescente.
Esaminando il comportamento agli estremi del dominio abbiamo:

$$\lim_{x \to 0^+} y = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} y = -\infty$$

e, quindi, poiché y è continua, la funzione interseca una sola volta l'asse x.

Localizziamo approssimativamente l'intersezione x_0 con l'ausilio di una calcolatrice:

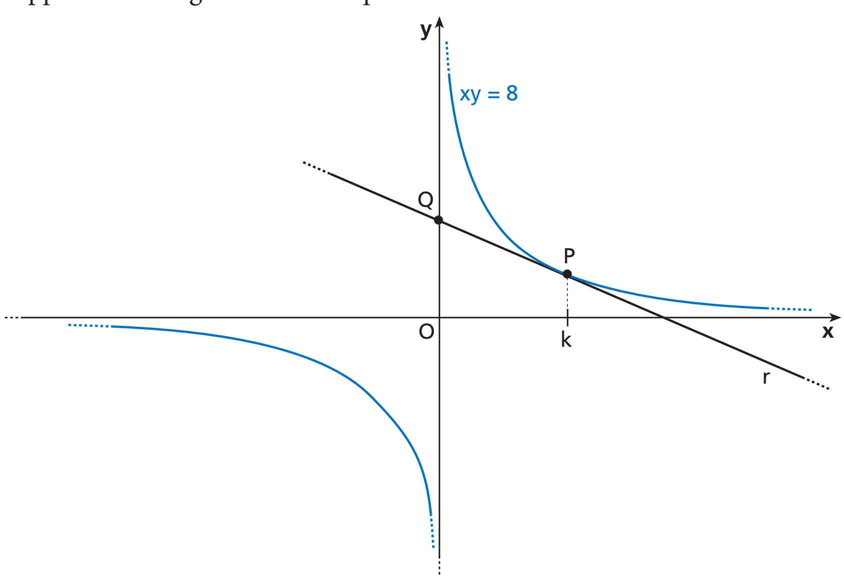
$$y(3) = 0,1504\ldots, \quad y(4) = -0,0604\ldots \quad \rightarrow \quad 3 < x_0 < 4.$$

Calcoliamo x_0 utilizzando il metodo di bisezione.
L'approssimazione di x_0 richiesta è di almeno 10^{-3}, quindi dobbiamo stimare quante iterazioni effettuare per avere $\varepsilon_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} < 10^{-3}$, con $[a_0; b_0] = [3; 4]$.

$$\varepsilon_n < \frac{1}{1000} \text{ se } \frac{4-3}{2^n} < \frac{1}{1000} \rightarrow 2^n > 1000 \rightarrow n \geq 10.$$

Dobbiamo effettuare almeno 10 iterazioni.

6 Rappresentiamo graficamente il problema.



Le coordinate di P sono $\left(k; \frac{8}{k}\right)$, con $k > 0$ perché P appartiene al primo quadrante.

La derivata della funzione $f(x) = y = \frac{8}{x}$ è $f'(x) = -\frac{8}{x^2}$ e la retta tangente il grafico della funzione in P ha equazione:

$$y - y_P = f'(x_P)(x - x_P) \to y - \frac{8}{k} = -\frac{8}{k^2}(x - k).$$

Intersecando la retta tangente con l'asse y otteniamo le coordinate di $Q\left(0; \frac{16}{k}\right)$.
Calcoliamo la lunghezza del segmento PQ:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(k-0)^2 + \left(\frac{8}{k} - \frac{16}{k}\right)^2} = \sqrt{k^2 + \frac{64}{k^2}}.$$

Il punto di minimo di $\overline{PQ}$ coincide con il punto di minimo di $\overline{PQ}^2$ perché l'elevamento a potenza di una quantità positiva è una funzione strettamente crescente.
Determiniamo quindi il minimo di $\overline{PQ}^2$.

$$\varphi(k) = \overline{PQ}^2 = k^2 + \frac{64}{k^2} \to \varphi'(k) = 2k - \frac{128}{k^3} = \frac{2k^4 - 128}{k^3},$$

$$\varphi'(k) > 0 \to 2k^4 - 128 > 0 \to k^4 - 64 > 0 \to (k^2+8)(k^2-8) > 0 \to$$

$$\to k^2 - 8 > 0 \to k < -2\sqrt{2} \vee k > 2\sqrt{2}.$$

Poiché $k > 0$, $\varphi(k)$ è decrescente in $]0; 2\sqrt{2}[$ e crescente in $]2\sqrt{2}; +\infty[$.
Per $k = 2\sqrt{2}$, quindi, la distanza $\overline{PQ}$ assume il valore minimo.