

Risolvi un problema e tre quesiti a scelta.

### Problemi

**1** Considera la famiglia di funzioni:

$$y = \frac{ax^2 + (a-1)x}{x-a}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- a) Dimostra che hanno tre punti in comune e determina le loro coordinate.
- b) Trova la funzione che ha asintoto obliquo parallelo alla retta di equazione  $x + y = 0$ .
- c) Studia la funzione trovata al punto precedente e disegna il suo grafico.
- d) Verifica che il grafico della stessa funzione è simmetrico rispetto al punto  $C(-1; 0)$ .

**2** Data una semicirconferenza di diametro  $\overline{AB} = 2r$ , e preso su di essa un punto  $P$ , considera il triangolo  $APB$  e traccia la bisettrice dell'angolo  $\widehat{PAB}$  che interseca in  $Q$  il lato  $PB$ .

- a) Posto  $\widehat{PAB} = 2x$ , calcola in funzione di  $x$  il rapporto  $y = \frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}}$ .
- b) Studia la funzione  $y$  e disegna il suo grafico nell'intervallo imposto dal problema.
- c) Indica se la funzione è invertibile in tale intervallo e, nel caso lo sia, determina l'equazione della funzione inversa e rappresentala graficamente.
- d) Determina, utilizzando un metodo di ricerca approssimata delle radici, l'ascissa del punto  $T$  tale che la retta tangente al grafico della funzione inversa formi con l'asse  $x$  un angolo di  $45^\circ$ .

### Quesiti

**1** Dimostra che la funzione  $f(x) = ax^4 + bx^3 + c$  per qualsiasi  $a, b \neq 0$  ha due punti stazionari e due flessi, uno dei quali coincide con uno dei punti stazionari. Trova per quali valori di  $a, b, c$  i punti di flesso sono  $(0; -1)$  e  $(1; 0)$ .

**2** Considera la funzione  $f(x) = a + e^x(bx + c)$ . Trova  $a, b, c$  in modo che il grafico di  $f(x)$  abbia un flesso nel punto di ascissa 1 con tangente di equazione  $ex + y + e = 0$ .

**3** Considera la funzione di equazione  $y = x^3 + px^2 + x - 1$ .

- a) Trova per quali valori di  $p$  la funzione ammette un massimo e un minimo relativi.
- b) Determina il luogo descritto dal punto di flesso al variare di  $p$ .

**4** Fra tutte le piramidi regolari a base quadrata inscritte in una sfera di raggio  $r$  determina quella che ha il massimo volume.

**5** Dimostra che l'equazione  $\text{arctg } x = \ln x$  ammette soltanto una soluzione. Utilizzando un procedimento a tua scelta dai una stima del numero di iterazioni necessarie per determinare la soluzione con un errore minore di  $10^{-3}$ .

**6** Data la curva di equazione  $xy = 8$ , traccia la tangente  $r$  nel punto  $P$  del primo quadrante di ascissa  $k$ . Indicando con  $Q$  il punto d'intersezione di  $r$  con l'asse  $y$ , trova per quale valore di  $k$  la distanza  $\overline{PQ}$  è minima.

ESERCIZI	Problemi								Quesiti			TOT
	1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d	n. ...	n. ...	n. ...	
PUNTEGGIO	1,2	0,8	2	1,5	2	1	1	1,5	1,5	1,5	1,5	10
IL TUO PUNTEGGIO												