Risoluzione della verifica IN UN'ORA - SECONDA PROVA

1 Il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty \cdot 0$.

Per utilizzare la regola di De L'Hospital, dobbiamo ricondurre il limite a una delle seguenti forme: $\frac{\infty}{\infty}$ oppure $\frac{0}{0}$.

Riscriviamo il limite per ricondurci alla forma $\frac{0}{0}$ e applichiamo la regola di De L'Hospital. Riordiniamo i termini e svolgiamo i calcoli.

$$\lim_{x\to-\infty} x\ln(e^x+1) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(e^x+1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{e^x+1}\cdot e^x}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2e^x}{e^x+1}$$

Il limite si presenta ancora nella forma indeterminata $0\cdot\infty$. Possiamo applicare una seconda volta il teorema di De L'Hospital, riconducendoci prima a una delle forme indeterminate ammesse.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{\frac{e^x+1}{e^x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{1+e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{-e^{-x}}$$

Applichiamo ancora la regola di De L'Hospital, senza operare modifiche nel testo perché il limite si trova già nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, e troviamo il risultato

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}(-2e^x) = 0.$$

---

2 Il limite si presenta nella forma indeterminata 0^0.

Per utilizzare la regola di De L'Hospital, dobbiamo ricondurre il limite a una delle seguenti forme: $\frac{\infty}{\infty}$ oppure $\frac{0}{0}$. Riscriviamo il limite nella forma

$$\lim_{x\to0}(1-\cos x)^{\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to0} e^{\ln(1-\cos x)^{\operatorname{sen}x}} = \lim_{x\to0} e^{\operatorname{sen}x\,\ln(1-\cos x)} = \lim_{x\to0} e^{\frac{\ln(1-\cos x)}{\frac{1}{\operatorname{sen}x}}}$$

dove abbiamo riscritto l'esponente in modo tale da poter applicare la regola di De L'Hospital.
Svolgiamo i calcoli all'esponente:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-\cos x)}{\frac{1}{\operatorname{sen}x}} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{\operatorname{sen}x}{1-\cos x}}{\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2x}} = \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{1-\cos x}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2x}{-\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{\cancel{1-\cos x}}\cdot\frac{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)}{-\cos x} = \lim_{x\to0}\left(-\frac{\operatorname{sen}x(1+\cos x)}{\cos x}\right) = 0.$$

Il limite iniziale, quindi, vale:

$$\lim_{x\to0}(1-\cos x)^{\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to0}e^{\operatorname{sen}x\ln(1-\cos x)} = 1.$$

---

3 Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ quindi possiamo applicare direttamente il teorema di De L'Hospital.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\ln x}{1+\cos\pi x} = \lim_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{x}}{-\pi\operatorname{sen}\pi x} = \lim_{x\to1^-}\frac{-1}{\pi x\operatorname{sen}\pi x} = -\infty$$

4 **a)** Per dimostrare che $f(x) = 2x + \cos x$ è biiettiva, osserviamo che:

- per il teorema del confronto, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ in quanto $|\cos x| \leq 1$;
- per il teorema dei valori intermedi, il codominio della funzione è $\mathbb{R}$;
- $f'(x) = 2 - \operatorname{sen} x > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$, quindi la funzione è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

Quindi la funzione è iniettiva e suriettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

b) Calcoliamo $g'(\pi)$ sfruttando il teorema della derivata della funzione inversa.

Abbiamo infatti $g'(\pi) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, dove $f(x_0) = \pi$.

Determiniamo x_0:

$$2x_0 + \cos x_0 = \pi \rightarrow x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Sostituiamo il valore di x_0 nell'espressione della derivata dell'inversa e svolgiamo i calcoli.

$$g'(\pi) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{2 - \operatorname{sen} x_0} = \frac{1}{2-1} = 1$$

c) f è continua è derivabile in tutto il suo dominio, quindi in particolare anche nell'intervallo $[0; 2\pi]$ e pertanto vale il teorema di Lagrange.

$$f'(c) = \frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi - 0} = \frac{4\pi + 1 - 1}{2\pi} = 2.$$

Determiniamo c:

$$2 - \operatorname{sen} c = 2 \rightarrow \operatorname{sen} c = 0 \rightarrow c = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

In $]0; 2\pi[$, c'è un solo punto in cui la retta tangente al grafico di f è parallela alla retta passante per gli estremi dell'intervallo: $c = \pi$.

---

5 $f(x) = ax^3 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Per determinare il valore dei parametri, calcoliamo la derivata prima e seconda di f

$$f'(x) = 3ax^2 + b$$

$$f''(x) = 6ax$$

e mettiamo a sistema le condizioni richieste:

$$\begin{cases} 4 = f(2) \\ f'(2) = 11 \\ f''(2) = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4 = 8a + 2b + c \\ 11 = 12a + b \\ 12 = 12a \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo: $a = 1, b = -1, c = -2$.
La funzione è, quindi, $f(x) = x^3 - x - 2$ e le sue derivate sono

$$f'(x) = 3x^2 - 1, \; f''(x) = 6x.$$

b) L'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel suo punto di ascissa $x = \dfrac{1}{2}$ è

$$y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y + \frac{19}{8} = -\frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{8} - \frac{19}{8} \to x + 4y + 9 = 0.$$

L'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel suo punto di ascissa $x = -\frac{1}{2}$ è

$$y - f\left(-\frac{1}{2}\right) = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$y + \frac{13}{8} = -\frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{8} - \frac{13}{8} \to x + 4y + 7 = 0.$$

c) f è continua e derivabile in tutto il dominio perché è un polinomio, quindi in particolare nell'intervallo $[-1; 1]$.
Inoltre $f(-1) = -1 + 1 - 2 = -2$ e $f(1) = 1 - 1 - 2 = -2$ quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle. Esiste, pertanto, almeno un $x \in]-1; 1[$ in cui la derivata si annulla.

$$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 1 = 0 \to x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Entrambi i valori sono accettabili perché sono punti interni all'intervallo $[-1; 1]$.

d) Studiamo sommariamente il grafico della funzione.

- $D = \mathbb{R}$;
- la funzione interseca l'asse y nel punto di ordinata -2;
- la funzione interseca l'asse x in un punto di ascissa $\alpha > 0$, con α intersezione della retta $y = x + 2$ con la cubica $y = x^3$;
- il segno della funzione è positivo se $x > \alpha$ (dove il grafico della cubica è *sopra* quello della retta), negativo altrimenti;
- i limiti della funzione agli estremi del dominio sono: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$;
- studiamo il segno della derivata prima:

  $$f'(x) > 0 \to x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee x > \frac{\sqrt{3}}{3}$$

  quindi la funzione è crescente negli intervalli $\left]-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$ e $\left]\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[$ e decrescente nell'intervallo $\left]-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$.

  Il grafico probabile è rappresentato nella figura a lato.