Risoluzione della verifica IN UN'ORA - PRIMA PROVA

1 Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$.

$$f'(x) = \cos\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}\cdot\cos\frac{x+1}{x-1}$$

Per calcolare Δy mediante il differenziale, utilizziamo la relazione seguente

$$\Delta y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x$$

$$\Delta y = \operatorname{sen}\frac{-1+1}{-1-1} + \frac{-2}{(-1-1)^2}\cdot\cos\frac{-1+1}{-1-1}\cdot 0{,}1 = -\frac{1}{2}\cdot 0{,}1 = -0{,}05.$$

---

2 Calcolare un valore approssimato di $\log_2 17$, equivale a calcolare l'incremento Δy della funzione $f(x) = \log_2 x$ nel punto $x_0 = 16$ con incremento $\Delta x = 1$.

Calcoliamo quindi la derivata di $f(x)$ e sostituiamo i valori nella relazione dell'approssimazione differenziale:

$$f'(x) = D\log_2 x = \frac{\log_2 e}{x}$$

$$\log_2 17 = \log_2 16 + \frac{\log_2 e}{16}\cdot 1 = 4 + \frac{\log_2 e}{16} \simeq 4 + \frac{\log_2 2}{16} = 4 + \frac{1}{16} \simeq 4{,}06.$$

---

3 Calcolare un valore approssimato di $\operatorname{tg}(0,8)$ equivale a calcolare l'incremento Δy della funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ nel punto $x_0 = \frac{\pi}{4}$ con incremento $\Delta x = 0{,}8 - \frac{\pi}{4}$.

Calcoliamo quindi la derivata di $f(x)$ e sostituiamo i valori nella relazione dell'approssimazione differenziale:

$$f'(x) = \operatorname{tg}^2 x + 1 \to \operatorname{tg}(0{,}8) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \left(\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4} + 1\right)\cdot\left(0{,}8 - \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 2\cdot\left(0{,}8 - \frac{\pi}{4}\right) \simeq 1{,}0292.$$

---

4 $f(x)$ è una funzione definita a tratti e, poiché la continuità è condizione necessaria (ma non sufficiente) per la derivabilità, verifichiamo prima di tutto che la funzione sia continua nel suo dominio.

$$f(x) = \begin{cases} x+7 & \text{se } x \leq -2 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{se } -2 < x \leq 3 \\ \sqrt{x-3} & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Le funzioni che compongono f sono tutte continue negli intervalli indicati, quindi gli unici punti in cui dobbiamo verificare la continuità sono i punti di raccordo.

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+}(x^2 - 2x - 3) = 5,\ f(-2) = 5 \to f \text{ è continua in } -2.$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(\sqrt{x-3}) = 0,\ f(3) = 0 \to f \text{ è continua in } 3.$$

La funzione è quindi continua su tutto $\mathbb{R}$.

Calcoliamo la derivata della funzione negli insiemi in cui è definita e calcoliamo i limiti destro e sinistro nei punti di raccordo.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < -2 \\ 2x - 2 & \text{se } -2 < x < 3, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-3}} & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

continua in tutti i punti interni agli intervalli indicati quindi non ci sono altri punti di non derivabilità.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -2^-} f'(x) = \lim_{x\to -2^-} 1 = 1 \\ \lim_{x\to -2^+} f'(x) = \lim_{x\to -2^+} (2x-2) = -6\end{array}\right] \to x = -2 \text{ è un punto angoloso,}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 3^-} f'(x) = \lim_{x\to 3^-} (2x-2) = 4 \\ \lim_{x\to 3^+} f'(x) = \lim_{x\to 3^+} \dfrac{1}{2\sqrt{x-3}} = +\infty\end{array}\right] \to x = 3 \text{ è un punto angoloso.}$$

Pertanto, gli unici punti di non derivabilità di f sono $x = -2$ e $x = 3$ dove la funzione ha due punti angolosi.

---

5 Perché

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x+a} - 3\,\text{sen}\,x & \text{se } x \leq 0 \\ \text{tg}\,x + b & \text{se } x > 0 \wedge x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\end{cases}$$

sia continua in tutto il dominio dobbiamo imporre la continuità nei punti di raccordo.

Abbiamo quindi:

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \to e^a = b.$$

Perché $f(x)$ sia derivabile in tutto il dominio dobbiamo imporre che la derivata sia continua nei punti di raccordo.
Calcoliamo la derivata di $f(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2e^{2x+a} - 3\cos x & \text{se } x < 0 \\ \text{tg}^2 x + 1 & \text{se } x > 0 \wedge x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\end{cases}$$

e imponiamo la continuità nei punti di raccordo

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) \to \lim_{x\to 0^-} (2e^{2x-a} - 3\cos x) = \lim_{x\to 0^+} (\text{tg}^2 x + 1) \to 2e^a - 3 = 1.$$

Mettiamo a sistema le due condizioni trovate e risolviamo:

$$\begin{cases} e^a = b \\ 2e^a - 3 = 1\end{cases} \to \begin{cases} e^a = b \\ e^a = 2\end{cases} \to \begin{cases} b = 2 \\ a = \ln 2\end{cases}.$$

Quindi la funzione richiesta è:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{2x} - 3\,\text{sen}\,x & \text{se } x \leq 0 \\ \text{tg}\,x + 2 & \text{se } x > 0 \wedge x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.\end{cases}$$