Risoluzione della verifica IN UN'ORA - SECONDA PROVA

1 Calcoliamo la derivata di $y = \sqrt{\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}} + \operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{4}{4+x^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{2}{4+x^2}$$

---

2 Calcoliamo la derivata di $y = \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{2x+1}$.

$$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^2} \cdot \frac{2(2x+1)-2(2x-1)}{(2x+1)^2} = \frac{(2x+1)^2}{2(4x^2+1)} \cdot \frac{4}{(2x+1)^2} = \frac{2}{4x^2+1}$$

---

3 Calcoliamo la derivata di $y = \ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$.

$$y' = \frac{1}{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \cdot \frac{-\operatorname{sen}x(1-\cos x)-\operatorname{sen}x(1+\cos x)}{(1-\cos x)^2} = \frac{-2\operatorname{sen}x}{(1+\cos x)(1-\cos x)} =$$

$$= \frac{-2\operatorname{sen}x}{1-\cos^2 x} = \frac{-2\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-2}{\operatorname{sen}x}$$

---

4 Calcoliamo la derivata di $y = \frac{x^2e^x+2}{1-x^2e^x}$.

$$y' = \frac{(2xe^x+x^2e^x)(4-x^2e^x)-(x^2e^x+2)(-2xe^x-x^2e^x)}{(4-x^2e^x)^2} =$$

$$= \frac{(2xe^x+x^2e^x)(4-x^2e^x+x^2e^x+2)}{(4-x^2e^x)^2} = \frac{6xe^x(2+x)}{(4-x^2e^x)^2}$$

---

5 Per dimostrare che $f(x) = x^3$ è derivabile in $x = 0$, calcoliamo il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(0+h)^3-0^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h} = \lim_{h\to 0}h^2 = 0.$$

Il limite esiste finito e pertanto la funzione è derivabile.

La funzione inversa di f è $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Calcoliamo il limite del rapporto incrementale in $x = 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{(0+h)}-\sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty.$$

Il limite del rapporto incrementale è infinito, quindi la funzione non è derivabile in $x = 0$.

---

6 Calcoliamo le derivate prima, seconda e terza di f:

$$f(x) = \frac{a}{x} + bx^2 + c$$

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} + 2bx$$

$$f''(x) = \frac{2a}{x^3} + 2b$$

$$f'''(x) = -\frac{6a}{x^4}.$$

Mettiamo a sistema le condizioni date dal problema e risolviamo.

$$\begin{cases} f(1) = 4 \to 4 = a + b + c \\ f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \to -4a - b = 0 \\ f'''(x) = \frac{6}{x^4} \to -\frac{6a}{x^4} = \frac{6}{x^4} \end{cases} \to \begin{cases} c = 4 - a - b = 4 + 3a \\ b = -4a \\ a = -1 \end{cases} \to \begin{cases} c = 1 \\ b = 4 \\ a = -1 \end{cases}$$

La funzione è $f(x) = -\frac{1}{x} + 4x^2 + 1$.

---

7 Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{x+6}$ è $x \geq -6$.
Mostriamo che f è iniettiva e suriettiva, e quindi biiettiva, nel suo dominio.

- $f(x_1) = f(x_2) \to \sqrt{x_1 + 6} = \sqrt{x_2 + 6} \to x_1 + 6 = x_2 + 6 \to x_1 = x_2 \to f$ è iniettiva.
- Il codominio della funzione è l'insieme dei numeri reali positivi. Mostriamo che $\forall y \geq 0, \exists x \geq -6$ tale che $y = \sqrt{x+6}$.
  $\forall y \geq 0$, possiamo definire $x = y^2 - 6$ e abbiamo che $x \geq -6$ e $y = \sqrt{x+6}$. Pertanto la funzione è suriettiva nel suo codominio.

Calcoliamo $D(f^{-1})$ utilizzando la regola di derivazione delle funziona inversa. Se y_0 è un punto del dominio di f^{-1}, allora il corrispondente punto del domino di f è $x_0 = y_0^2 - 6$.
Abbiamo

$$D(f^{-1})(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(y_0^2 - 6)}.$$

La derivata di f è $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+6}}$ e sostituendo nell'espressione troviamo:

$$D(f^{-1})(y_0) = \frac{1}{f'(y_0^2 - 6)} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{y_0^2 - 6 + 6}}} = 2y_0.$$

In generale, abbiamo quindi $D(f^{-1})(x) = 2x$.

Verifichiamo il risultato ottenuto ricavando direttamente la funzione inversa di f e calcolando la sua derivata.

$$y = \sqrt{x+6} \to y^2 = x + 6 \to x = y^2 - 6 \to f^{-1}(x) = x^2 - 6 \to D(x^2 - 6) = 2x.$$

---

8 L'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = \operatorname{tg} x - x$ in $\left(\frac{\pi}{4}; 1 - \frac{\pi}{4}\right)$ è

$$y - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Calcoliamo la derivata della funzione e valutiamola in $\frac{\pi}{4}$:

$$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x - 1 = \operatorname{tg}^2 x \to f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Abbiamo quindi:

$$y = x - \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\pi}{4} = x + 1 - \frac{\pi}{2} = x + \frac{2 - \pi}{2}.$$

In conclusione $m = 1$ e $q = \frac{2 - \pi}{2}$.