Risoluzione della verifica IN UN'ORA - PRIMA PROVA

1 Calcoliamo il limite del rapporto incrementale di $y = x^2 + 5$ in $x = 1$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(1+h)^2+5}-\sqrt{1^2+5}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+2h+h^2+5}-\sqrt{6}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{6+2h+h^2}-\sqrt{6}}{h}\cdot\frac{\sqrt{6+2h+h^2}+\sqrt{6}}{\sqrt{6+2h+h^2}+\sqrt{6}} = \lim_{h\to 0}\frac{6+2h+h^2-6}{h(\sqrt{6+2h+h^2}+\sqrt{6})} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2+h}{\sqrt{6+2h+h^2}+\sqrt{6}} = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Calcoliamo ora direttamente la derivata della funzione e valutiamola in $x = 1$.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+5}}\cdot(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \to y'(1) = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Abbiamo ottenuto lo stesso risultato.

---

2 Calcoliamo il limite del rapporto incrementale di $y = -\cos 2x$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{-\cos[2(x+h)]+\cos 2x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-\cos 2x\cos 2h+\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} 2h+\cos 2x}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos 2x(1-\cos 2h)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} 2h}{h}$$

Ricordando che le forme indeterminate $\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}$ e $\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}$ sono due limiti notevoli che valgono rispettivamente 1 e 0, otteniamo:

$$\lim_{h\to 0}\frac{-\cos[2(x+h)]+\cos 2x}{h} = \lim_{h\to 0}\left(2\cos 2x\cdot\frac{1-\cos 2h}{2h}\right) + \lim_{h\to 0}\left(2\operatorname{sen} 2x\cdot\frac{\operatorname{sen} 2h}{2h}\right) = 2\operatorname{sen} 2x.$$

Calcoliamo ora direttamente la derivata di y, utilizzando le regole di derivazione:

$$y' = -(-\operatorname{sen} 2x)\cdot 2 = 2\operatorname{sen} 2x.$$

Abbiamo ottenuto lo stesso risultato.

---

3 Calcoliamo la derivata di $y = \dfrac{2-x}{x\ln x}$.

Per la regola del quoziente: $y' = \dfrac{D(2-x)\cdot(x\ln x)-(2-x)\cdot D(x\ln x)}{(x\ln x)^2}$.

Per la regola delle derivate di un polinomio abbiamo $D(2-x) = -1$.

Per la regola della derivata del prodotto abbiamo $D(x\ln x) = \ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.

Sostituiamo nell'espressione iniziale e svolgiamo i calcoli.

$$y' = \frac{-x\ln x-(2-x)(\ln x+1)}{(x\ln x)^2} = \frac{-x\ln x-2\ln x-2+x+x\ln x}{x^2\ln^2 x} = \frac{x-2(\ln x+1)}{x^2\ln^2 x}.$$

---

4 Calcoliamo la derivata di $y = (e^{x^2}+3)^2$.
Applicando due volte la regola di derivazione della funzione composta otteniamo:

$$y' = 2(e^{x^2}+3)\cdot D(e^{x^2}+3) = 2(e^{x^2}+3)\cdot(2xe^{x^2}) = 4xe^{x^2}(e^{x^2}+3).$$

5 Calcoliamo la derivata di $y = \dfrac{1}{x^{\cos x}}$.

Riscriviamo la funzione come $y = x^{-\cos x} = e^{\ln(x^{-\cos x})} = e^{-\cos x \ln x}$ e utilizziamo la regola di derivazione della funzione composta:

$$y' = e^{-\cos x \ln x} \cdot D(-\cos x \ln x) = x^{-\cos x} \cdot D(-\cos x \ln x).$$

Per la regola di derivazione del prodotto $D(-\cos x \ln x) = \operatorname{sen} x \ln x - \cos x \cdot \dfrac{1}{x}$ da cui, sostituendo nell'espressione della derivata, otteniamo:

$$y' = \frac{1}{x^{\cos x}} \cdot \left(\operatorname{sen} x \ln x - \frac{\cos x}{x}\right).$$

---

6 Calcoliamo la derivata di $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{2-x}}$.

Per la regola di derivazione della funzione composta abbiamo $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+3}{2-x}}} \cdot D\left(\dfrac{x+3}{2-x}\right)$.

Per la regola della derivata del quoziente, $D\left(\dfrac{x+3}{2-x}\right) = \dfrac{2-x-(x+3)(-1)}{(2-x)^2} = \dfrac{5}{(2-x)^2}$.

Sostituendo nell'espressione della derivata troviamo

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+3}{2-x}}} \cdot \frac{5}{(2-x)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{2-x}{x+3}} \cdot \frac{1}{(2-x)^2}.$$

---

7 Riscriviamo la funzione $y = f(x) = |x - x^2|$ mettendo in evidenza i due casi del valore assoluto

$$x - x^2 > 0 \text{ se } 0 < x < 1 \rightarrow f(x) = \begin{cases} x - x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - x & x < 0 \vee x > 1 \end{cases}$$

e osserviamo che la funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$.

Calcoliamo il rapporto incrementale sinistro e destro in $x = 1$.

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)-(1+h)^2-(1-1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1+h-1-2h-h^2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h(-1-h)}{h} = -1$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{(1+h)^2-(1+h)-(1-1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1+h^2+2h-1-h}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h(h+1)}{h} = 1$$

I due limiti sono diversi quindi non esiste il limite del rapporto incrementale in $x = 1$. Pertanto la funzione non è derivabile in $x = 1$.

---

8 $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{se } x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 4 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

a) Calcoliamo $f'(0)$ e $f'(3)$:

$x = 0$: $f(x) = 4 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow f'(0) = 0$;

$x = 3$: $f(x) = x^2 - 2x + 4 \rightarrow f'(x) = 2x - 2 \rightarrow f'(3) = 4$.

b) f è continua nel punto di raccordo $x = 2$; infatti $f(2) = 4$ e $\lim\limits_{x \to 2^+} x^2 - 2x + 4 = 4$.

Calcoliamo il limite per $x \to 2$ delle derivate destra e sinistra e verifichiamo se i due limiti sono uguali.

$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} 0 = 0 \qquad \lim_{x \to 2^+} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} (2x - 2) = 2$$

I due limiti sono diversi quindi la funzione non è derivabile in $x = 2$.