Risoluzione dei problemi

1 **a)** Perché $f(x)$ soddisfi le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo dato dobbiamo imporre che la funzione sia continua in tutto $[-2; 4]$ e derivabile in $]-2; 4[$.
Poniamo, quindi, le seguenti condizioni:

$f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$, per la continuità e

$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} f'(x)$, per la derivabilità.

Poiché $f(1) = \frac{1+a}{4}$ e $\lim_{x \to 1^+}(-x^2 + bx - b) = -1 + b - b = -1$, la prima condizione diventa:

$$\frac{1+a}{4} = -1 \to 1 + a = -4 \to a = -5.$$

Calcoliamo ora la derivata di f per $1 < x < 4$:

$$f'(x) = -2x + b.$$

Quindi $\lim_{x \to 1^+} f'(x) = -2 + b$.
L'espressione della derivata per $-2 \le x < 1$ è, invece,

$$f'(x) = \frac{x + 3 - (x - 5)}{(x+3)^2} = \frac{8}{(x+3)^2}.$$

Quindi $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \frac{8}{(1+3)^2} = \frac{1}{2}$.

La condizione sulla derivabilità della funzione in $x = 1$ diventa:

$$-2 + b = \frac{1}{2} \to b = \frac{1}{2} + 2 \to b = \frac{5}{2}.$$

Sostituiamo i valori trovati nella funzione e nella derivata prima.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{x+3} & \text{se } -2 \le x \le 1 \\ -x^2 + \dfrac{5}{2}x - \dfrac{5}{2} & \text{se } 1 < x \le 4 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{(x+3)^2} & \text{se } -2 \le x \le 1 \\ -2x + \dfrac{5}{2} & \text{se } 1 < x \le 4 \end{cases}.$$

Applichiamo ora il teorema di Lagrange per determinare il punto la cui esistenza è prevista dal teorema.

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(-2)}{4 - (-2)} = \frac{-16 + \frac{5}{2} \cdot 4 - \frac{5}{2} - (-7)}{6} = \frac{\frac{-3}{2}}{6} \to f'(c) = -\frac{1}{4}.$$

Poiché la funzione è definita a tratti, il punto c potrebbe trovarsi nel primo o nel secondo tratto. Abbiamo, pertanto, due possibilità:

$$\begin{cases} \dfrac{8}{(x+3)^2} = -\dfrac{1}{4} \\ -2 \le x \le 1 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} -2x + \dfrac{5}{2} = -\dfrac{1}{4} \\ 1 < x \le 4 \end{cases}.$$

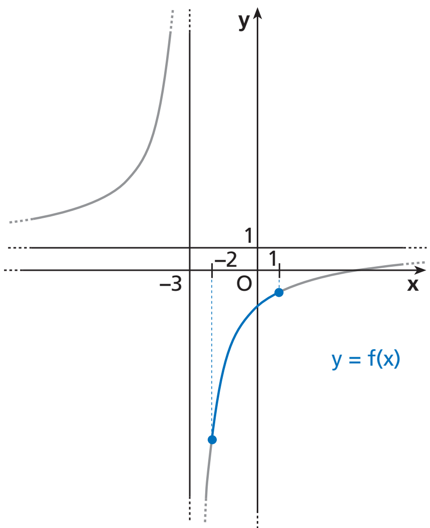
Osserviamo che il primo sistema non è mai verificato perché la derivata prima nell'intervallo $]-2; 1[$ è sempre positiva.

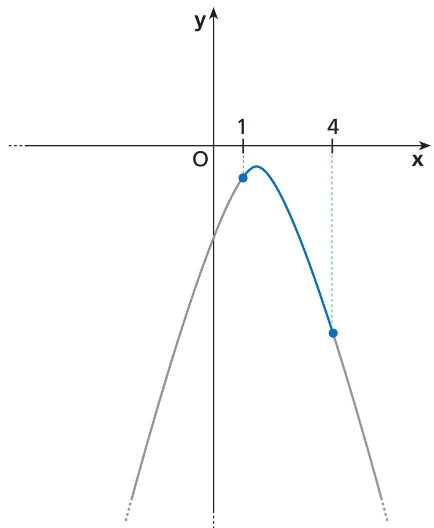
Risolviamo il secondo sistema:

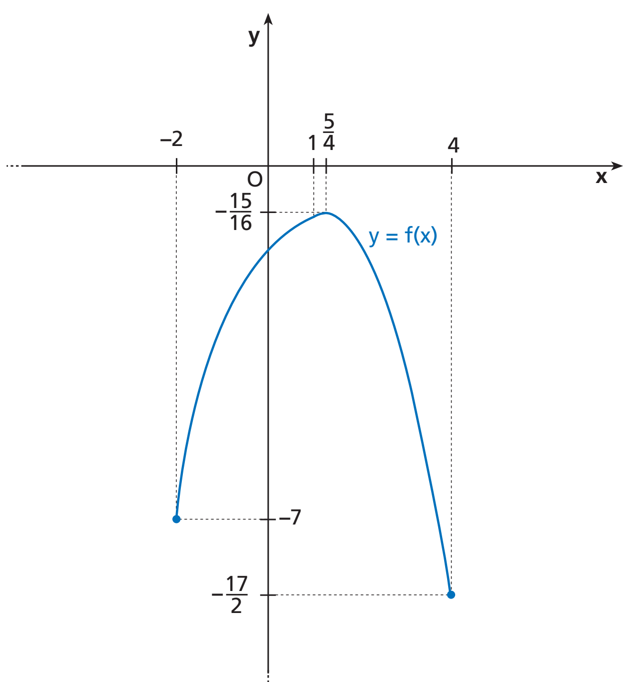
$$\begin{cases} -2x + \dfrac{5}{2} = -\dfrac{1}{4} \\ 1 < x \le 4 \end{cases} \to \begin{cases} -2x = -\dfrac{11}{4} \\ 1 < x \le 4 \end{cases} \to x = \frac{11}{8} \to f(x) = -\left(\frac{11}{8}\right)^2 + \frac{55}{16} - \frac{5}{2} = -\frac{61}{64}.$$

Le coordinate del punto la cui esistenza è prevista dal teorema di Lagrange, sono $\left(\frac{11}{8}; -\frac{61}{64}\right)$.

b) Il grafico di $f(x)$ è composto, nell'intervallo $[-2; 1]$, dal grafico di una funzione omografica di asintoti $x = -3$ e $y = 1$ e, nell'intervallo $[1; 4]$, dal grafico di un parabola di vertice $\left(\frac{5}{4}; -\frac{15}{16}\right)$, come riportato nella seguente sequenza di figure.







Due rette sono parallele quando hanno lo stesso coefficiente angolare. Il coefficiente angolare della retta data è 2.
Il coefficiente angolare della retta tangente la funzione in un suo punto è il valore della derivata prima calcolato in quel punto.
Quindi, per trovare in quali punti la funzione ammette come retta tangente una retta parallela a quella data, dobbiamo imporre $f'(x) = 2$.

Come per il punto precedente abbiamo due possibilità:

$$\begin{cases} \dfrac{8}{(x+3)^2} = 2 \\ -2 \leq x \leq 1 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} -2x + \dfrac{5}{2} = 2 \\ 1 < x \leq 4 \end{cases}.$$

Risolviamo separatamente i due sistemi.

$$\begin{cases} \dfrac{8}{(x+3)^2} = 2 \\ -2 \leq x \leq 1 \end{cases} \to \begin{cases} 4 = (x+3)^2 \\ -2 \leq x \leq 1 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 + 6x + 5 = 0 \\ -2 \leq x \leq 1 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = -5 \\ -2 \leq x < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = -1 \\ -2 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

di cui solo la soluzione $x = -1$ è accettabile.

Nel punto $P(-1; -3)$ la tangente al grafico della funzione è la retta $y = 2x - 1$ che è parallela alla retta data.

Passiamo al secondo sistema.

$$\begin{cases} -2x + \dfrac{5}{2} = 2 \\ 1 < x \leq 4 \end{cases} \to \begin{cases} -4x = -1 \\ 1 < x \leq 4 \end{cases} \to \begin{cases} x = \dfrac{1}{4} \\ 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

ma la soluzione non è accettabile perché non appartiene all'intervallo $]1; 4]$.

c) Le equazioni delle rette sono:

$t_1: y - f(-2) = f'(-2)(x+2) \to y = 8x + 9$

$t_2: y - f(4) = f'(4)(x-4) \to y = -\dfrac{11}{2}x + \dfrac{27}{2}$.

Per dimostrare che non esistono altri punti di ascissa compresa nell'intervallo $[-2; 4]$ in cui rette tangenti al grafico siano parallele a t_1 oppure a t_2, verifichiamo che le equazioni

$f'(x) = 8$ e $f'(x) = -\dfrac{11}{2}$ non hanno soluzione in $]-2; 4[$.

$$f'(x) = 8 \to \begin{cases} \dfrac{8}{(x+3)^2} = 8 \\ -2 < x \leq 1 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} -2x + \dfrac{5}{2} = 8 \\ 1 < x < 4 \end{cases}.$$

I° sistema: $(x+3)^2 = 1 \to x + 3 = \pm 1 \to x_1 = -4 \vee x_2 = -2$.

Entrambe le soluzioni non sono accettabili perché non appartengono all'intervallo $]-2; 1]$.

II° sistema: $-2x = 8 - \dfrac{5}{2} \to x = -\dfrac{11}{4}$, soluzione non accettabile perché esterna all'intervallo $]1; 4[$.

Non esistono, pertanto, rette parallele a t_1. Studiamo il secondo caso.

$$f'(x) = -\dfrac{11}{2} \to \begin{cases} \dfrac{8}{(x+3)^2} = -\dfrac{11}{2} \\ -2 < x \leq 1 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} -2x + \dfrac{5}{2} = -\dfrac{11}{2} \\ 1 < x < 4 \end{cases}$$

I° sistema: non ha soluzioni perché f' è sempre positiva in $]-2; 1]$.

II° sistema: $-2x = -\dfrac{11}{2} - \dfrac{5}{2} \to x = 4$, non accettabile perché esterna all'intervallo $]1; 4[$.

Non esistono, quindi, rette parallele a t_2.

2 **a)** Il dominio è $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

Inoltre $f(-x) = -x\ln|-x| = -x\ln|x| = -f(x)$ quindi f è dispari.

Calcoliamo i limiti richiesti:

$\lim_{x\to+\infty} x\ln|x| = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} x\ln|x| = -\infty$ perché la funzione è dispari;

$\lim_{x\to 0^+} x\ln|x|$ è una forma indeterminata del tipo $0\cdot\infty$ riconducibile al tipo $\frac{\infty}{\infty}$, che si risolve applicando De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln|x| = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^2}{x}\right) = 0;$$

$\lim_{x\to 0^-} x\ln|x| = -\lim_{x\to 0^+} x\ln|x| = 0$ perché la funzione è dispari.

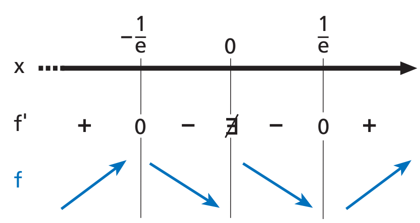
In $x = 0$ la funzione non esiste ma $\lim_{x\to 0} x\ln|x| = 0$, quindi abbiamo una discontinuità di terza specie o eliminabile. Per completare la funzione in modo continuo poniamo:

$$f(x) = \begin{cases} x\ln|x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

b) Calcoliamo la derivata prima per $x \neq 0$:

se $x > 0$: $f'(x) = D(x\ln x) = \ln x + 1$;

se $x < 0$: $f'(x) = D(x\ln(-x)) = \ln(-x) + 1$.



In conclusione, $\forall x \neq 0$, $f'(x) = \ln|x| + 1$.
Studiamo il suo segno.

La funzione è crescente in $\left]-\infty; -\frac{1}{e}\right[$ e in $\left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$

e decrescente in $\left]-\frac{1}{e}; 0\right[$ e in $\left]0; \frac{1}{e}\right[$.

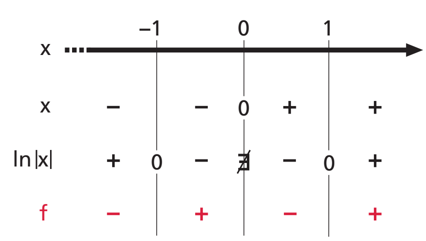
Nel punto $x = 0$, dove risulta

$\lim_{x\to 0^-}(\ln|x| + 1) = \lim_{x\to 0^+}(\ln|x| + 1) = -\infty$,

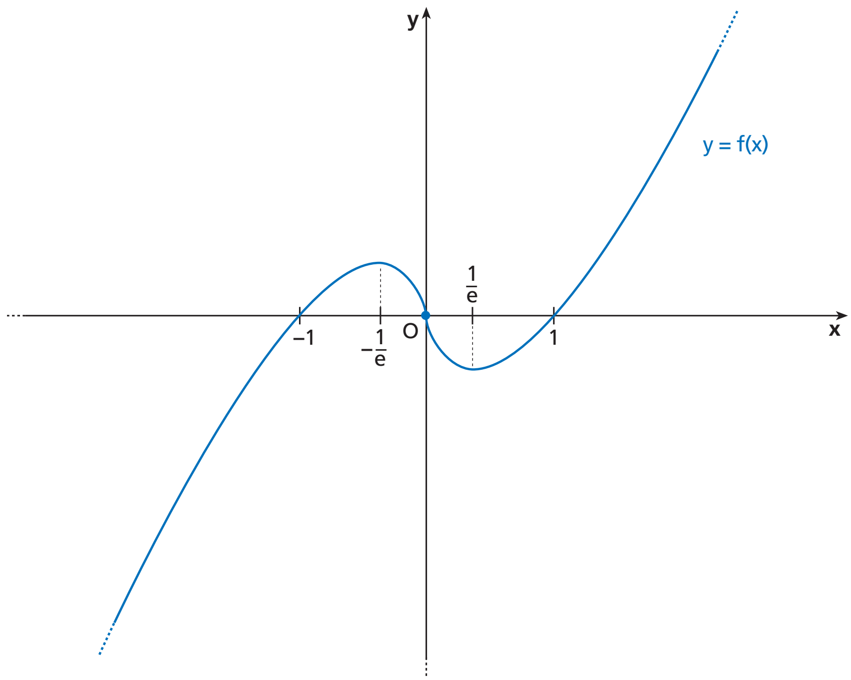
abbiamo un flesso a tangente verticale.

c) Studiamo il grafico probabile della funzione:

- $D = \mathbb{R}$;
- $y = 0 \to x = -1, x = 0, x = 1$;
- $x = 0 \to y = 0$;
- $f(x) > 0 \to \begin{cases} x > 0 \\ \ln|x| > 0 \to |x| > 1 \to x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x < 0 \\ \ln|x| < 0 \to |x| < 1 \to -1 < x < 0 \vee 0 < x < 1 \end{cases}$
- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$;
- f crescente per $x < -\frac{1}{e} \vee x > \frac{1}{e}$;
- f decrescente per $-\frac{1}{e} < x < 0 \vee 0 < x < \frac{1}{e}$.



Il grafico probabile della funzione è il seguente.



d) $f(x)$ è crescente in $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$ quindi è iniettiva e suriettiva nel suo codominio.

Poiché $f(e^{-1}) = -e^{-1}$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, l'immagine è l'intervallo $\left[-\frac{1}{e}; +\infty\right[$ e la funzione è biiettiva da $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$ su $\left[-\frac{1}{e}; +\infty\right[$.

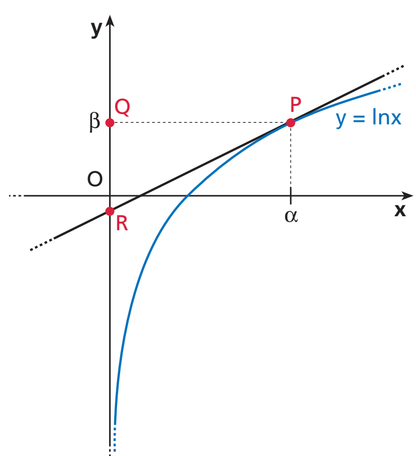
Detta g la funzione inversa abbiamo:

$$g'(\ln 4) = \frac{1}{f'(\alpha)} \text{ con } f(\alpha) = \ln 4 \text{ cioè } \alpha \ln \alpha = \ln 4.$$

Osserviamo che la soluzione è $\alpha = 2$. Pertanto: $g'(\ln 4) = \dfrac{1}{\ln 2 + 1}$.

Risoluzione dei quesiti

1 Rappresentiamo graficamente il problema.
Le coordinate di un generico punto del grafico della funzione sono $P(\alpha; \ln \alpha)$.
Da cui $Q(0; \ln \alpha)$.



Scriviamo l'equazione della tangente in

$$P: y - \ln \alpha = y'(\alpha)(x - \alpha) \to y - \ln \alpha = \frac{1}{\alpha}(x - \alpha).$$

Determiniamo le coordinate di R ponendo $x = 0$ nell'equazione della tangente: $R(0; \ln \alpha - 1)$.

La misura del segmento è: $\overline{RQ} = y_Q - y_R = \ln \alpha - (\ln \alpha - 1) = 1$.

La stessa proprietà vale anche nel caso in cui il logaritmo non sia in base e ma in una base a qualunque. Abbiamo, infatti:

$$P(\alpha, \log_a \alpha), Q(0; \log_a \alpha) \to y - \log_a \alpha = \frac{\log_a e}{\alpha}(x - \alpha)$$

$$R(0; \log_a \alpha - \log_a e) \to \overline{RQ} = \log_a \alpha - \log_a \alpha + \log_a e = \log_a e \text{ costante.}$$

---

2 Il dominio della funzione è dato da: $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1} - 1 > 0 \end{cases} \to x > 0.$

Inoltre, la funzione è continua nel suo dominio perché composizione di funzioni continue.
Calcoliamo la derivata prima:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x} - 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2(1 + x - \sqrt{1+x})}.$$

La derivata è sempre positiva nel suo dominio, quindi la funzione è crescente e pertanto è iniettiva nel dominio e suriettiva sulla sua immagine (codominio).

Dato che $\lim_{x \to 0^+} \ln(\sqrt{x+1} - 1) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} \ln(\sqrt{x+1} - 1) = +\infty$ il codominio è $\mathbb{R}$.

Indicata con f la funzione e con g la sua inversa per il teorema della derivata della funzione inversa abbiamo:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad \text{con } y = f(x).$$

Nel nostro caso $y = 0$ quindi:

$$0 = \ln(\sqrt{x+1} - 1) \to \sqrt{x+1} - 1 = 1 \to x = 3 \to f'(3) = \frac{1}{\sqrt{3+1} - 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3+1}} = \frac{1}{4}$$

e, sostituendo nella formula della derivata della funzione inversa, troviamo:

$$g'(0) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4.$$

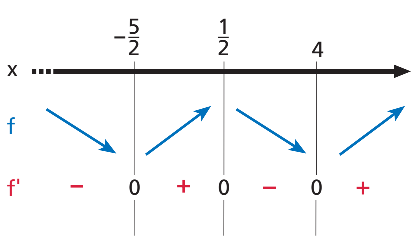
---

3 La funzione è definita, continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$.
Dal grafico sappiamo che non ci sono flessi a tangente orizzontale, quindi gli intervalli in cui la funzione è crescente coincidono con quelli in cui la derivata è positiva, mentre gli intervalli in cui la funzione è decrescente, coincidono con quelli in cui la derivata è negativa.

Pertanto abbiamo:

- per $x \in \left]-\infty; -\frac{5}{2}\right[$ la funzione decresce, quindi la derivata è negativa;
- per $x \in \left]-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right[$ la funzione cresce, quindi la derivata è positiva;
- per $x \in \left]\frac{1}{2}; 4\right[$ la funzione decresce, quindi la derivata è negativa;
- per $x \in]4; +\infty[$ la funzione cresce, quindi la derivata è positiva.

Riassumendo quanto trovato nel quadro dei segni, otteniamo:



4 Per definizione una funzione $f(x)$ è crescente in un punto c se esiste un intorno di c tale che per ogni x dell'intorno, escluso al più c, risulti:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)-f(c)<0, \text{ se } x-c<0 \\ f(x)-f(c)>0, \text{ se } x-c>0 \end{array}\right] \rightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0.$$

La funzione data ha derivata positiva in c quindi

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=f'(c)>0 \rightarrow \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c)>0.$$

Per il teorema di permanenza del segno esiste un intorno I_c del punto c tale che per ogni x dell'intorno, escluso al più c, abbiamo:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0.$$

Pertanto la funzione è crescente in c.

---

5 Scriviamo il rapporto incrementale in un punto generico x:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{3(x+h)-5}-\sqrt{3x-5}}{h}.$$

Il limite per h tendente a 0 è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$; quindi proviamo a eliminare l'indeterminazione razionalizzando il numeratore:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3(x+h)-5}-\sqrt{3x-5}}{h}\cdot\frac{\sqrt{3(x+h)-5}+\sqrt{3x-5}}{\sqrt{3(x+h)-5}+\sqrt{3x-5}}=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)-5-(3x-5)}{h\left(\sqrt{3(x+h)-5}+\sqrt{3x-5}\right)}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h\left(\sqrt{3(x+h)-5}+\sqrt{3x-5}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{3}{\sqrt{3(x+h)-5}+\sqrt{3x-5}}=\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}.$$

La funzione è, quindi, derivabile in ogni punto del suo dominio ad eccezione di $x=\frac{5}{3}$ e la sua derivata vale $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$.

---

6 Calcoliamo y' e y'':

$$y'=\operatorname{sen}x+x\cos x, \qquad y''=\cos x+\cos x-x\operatorname{sen}x=2\cos x-x\operatorname{sen}x.$$

Sostituiamo nel primo membro della relazione:

$$y''+xy'=2\cos x-x\operatorname{sen}x+x(\operatorname{sen}x+x\cos x)=(2+x^2)\cos x.$$

La relazione è, quindi, verificata.