IN DUE ORE

2 ore

Risolvi un problema e tre quesiti a scelta.

Problemi

1 È data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+a}{x+3} & \text{se } -2 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + bx - b & \text{se } 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Trova per quali valori di a e b la funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[-2; 4]$ e calcola le coordinate del punto che lo verifica.

b) Traccia il grafico di $f(x)$ e trova in quali punti ha come tangente una retta parallela alla retta di equazione $4x - 2y - 1 = 0$.

c) Scrivi le equazioni delle rette t_1 e t_2 tangenti al grafico di $f(x)$ nei punti di ascissa -2 e 4 e verifica che nell'intervallo $[-2; 4]$ non ci sono altre rette tangenti parallele a t_1 e t_2.

2 Sia $f(x) = x \ln|x|$.

a) Determina il dominio e i limiti di $f(x)$ per x tendente a $-\infty$, 0 e $+\infty$, dimostrando che la funzione ha una discontinuità di terza specie, quindi completa la definizione in modo da renderla continua in tutto $\mathbb{R}$.

b) Determina gli intervalli in cui $f(x)$ è crescente o decrescente.

c) Traccia un grafico probabile di $f(x)$.

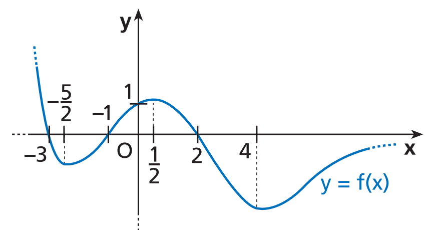
d) Dimostra che la funzione è invertibile nell'intervallo $\left[e^{-1}; +\infty\right[$, quindi calcola la derivata prima della funzione inversa in $y = \ln 4$.

Quesiti

1 Sia $P(\alpha; \beta)$ un generico punto del grafico della funzione $y = \ln x$. Indica con Q il punto di coordinate $(0; \beta)$ e con R il punto in cui la tangente al grafico in P interseca l'asse delle ordinate. Dimostra che la lunghezza del segmento RQ è costante al variare di P.
Vale la stessa proprietà se invece di $y = \ln x$ consideriamo $y = \log_a x$, con $a \in \mathbb{R}$?

2 Dimostra che la funzione $y = \ln(\sqrt{1+x} - 1)$ è invertibile. Calcola la derivata della funzione inversa in $y = 0$.

3 La figura rappresenta il grafico di una funzione $y = f(x)$, sappiamo inoltre che è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$.



Disegna il diagramma che rappresenta il segno della derivata prima.

4 Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile nel punto c con derivata strettamente positiva. Dimostra che la funzione è crescente in tale punto.

5 Calcola la derivata della funzione $f(x) = \sqrt{3x - 5}$ facendo uso della definizione.

6 Dimostra che la funzione $y = x \operatorname{sen} x - \dfrac{\pi}{4}$ soddisfa la relazione $y'' + xy' = (x^2 + 2)\cos x$.

ESERCIZI	Problema							Quesiti			TOT
	1a	1b	1c	2a	2b	2c	2d	n. …	n. …	n. …	
PUNTEGGIO	2,0	2,0	1,5	1,6	1,2	1	1,7	1,5	1,5	1,5	10
IL TUO PUNTEGGIO											