Risoluzione della verifica IN UN'ORA - SECONDA PROVA

1 **a)** La probabilità richiesta è la probabilità di ottenere 3 successi (esce 3 volte la pallina nera) in 6 prove ripetute (estrazioni con reimmisione). Applicando quindi la formula di Bernoulli otteniamo:

$$p = \binom{6}{3}\left(\frac{4}{6}\right)^3\left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{6!}{3!\,3!}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 20\cdot\frac{8}{729} = \frac{160}{729} \simeq 0{,}21948.$$

b) La probabilità richiesta è la probabilità dell'evento contrario la somma degli eventi «*non esce mai la pallina bianca*» e «*esce una volta la pallina bianca*» su 10 estrazioni.
Calcoliamo le probabilità dei due eventi con la legge di Bernoulli:

$$p(\text{«}\textit{non esce mai la pallina bianca}\text{»}) = \binom{10}{0}\left(\frac{3}{5}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^{10} = \left(\frac{2}{5}\right)^{10},$$

$$p(\text{«}\textit{esce una volta la pallina bianca}\text{»}) = \binom{10}{1}\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^9 = 10\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^9 = 6\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^9.$$

Pertanto, la probabilità richiesta è:

$$p = 1 - \left[\left(\frac{2}{5}\right)^{10} + 6\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^9\right] = 1 - \frac{32}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^9 \simeq 0{,}99832.$$

c) Le due urne hanno la stessa probabilità di essere scelte quindi, per la formula di disintegrazione, abbiamo:

$$p = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15} = 0{,}4\overline{6}.$$

d) Per calcolare la probabilità richiesta utilizziamo il teorema di Bayes, in quanto le due estrazioni sono già avvenute.
Ponendo:

E = «*sono state estratte contemporaneamente 2 palline dall'urna A*»,
F = «*sono state estratte contemporaneamente 2 palline nere dalla stessa urna*»,

abbiamo:

$$p(E\,|\,F) = \frac{P(E)\cdot P(F\,|\,E)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}.$$

---

2 **a)** Dobbiamo calcolare in quanti modi l'insegnante può estrarre 3 studentesse per l'interrogazione dalle 11 femmine che compongono la classe, non interessando l'ordine di estrazione. Si tratta delle combinazioni di 11 elementi presi 3 alla volta.
In definitiva: $C_{11,3} = \dfrac{11\cdot 10\cdot 9}{3!} = 165.$

b) Analogamente per i maschi abbiamo: $C_{17,3} = \dfrac{17\cdot 16\cdot 15}{3!} = 680.$

c) Se almeno uno studente deve essere maschio, l'unica combinazione esclusa tra tutte quelle possibili è che vengano estratte 3 femmine. Sottraiamo quindi ai modi in cui è possibile sorteggiare 3 studenti su un totale di 28, i modi in cui è possibile ottenere 3 femmine.
Abbiamo pertanto: $C_{28,3} - 165 = 3276 - 165 = 3111.$

3 $\binom{n}{k+1} = \frac{n+1}{n-k}\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k}$

Applichiamo al primo e al secondo membro la legge dei tre fattoriali e svolgiamo i calcoli.

Primo membro:

$$\binom{n}{k+1}$$
$$\downarrow$$
$$\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}$$

Secondo membro:

$$\frac{n+1}{n-k}\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k}$$
$$\downarrow$$
$$\frac{n+1}{n-k}\cdot\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} - \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$
$$\downarrow$$
$$\frac{(n+1)\,n!}{(k+1)\cdot k!\,(n-k)!} - \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$
$$\downarrow$$
$$\frac{n!\cdot(n+1-k-1)}{(k+1)\cdot k!\,(n-k)!}$$
$$\downarrow$$
$$\frac{n!\cdot(n-k)}{(k+1)\cdot k!\,(n-k)\,(n-k-1)!}$$
$$\downarrow$$
$$\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}$$

Abbiamo ottenuto lo stesso risultato, quindi l'uguaglianza è verificata.

---

4 La variabile casuale X ha una distribuzione di probabilità di tipo bernoulliano perché misura il numero di successi (studenti con più di 100 libri) su n prove (gruppo di 20 studenti) con probabilità di successo pari a $p = 0{,}6\%$.
Abbiamo quindi:

- $P(X = x) = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$, con $x = 0, 1, \ldots, n$; $n = 20$; $p = \frac{6}{1000}$;
- valor medio $= n \cdot p = 20 \cdot \frac{6}{1000} = 0{,}12$;
- varianza $= n \cdot p \cdot (1-p) = 20 \cdot \frac{6}{1000} \cdot \frac{994}{1000} = 0{,}11928$;
- deviazione standard $= \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{0{,}11928} \simeq 0{,}34537$.

La probabilità che il numero degli studenti con più di 100 libri, nel gruppo di 20, sia maggiore di 1 è:

$$P(X > 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{20}{0}\left(\frac{6}{1000}\right)^0\left(\frac{994}{1000}\right)^{20} - \binom{20}{1}\left(\frac{6}{1000}\right)^1\left(\frac{994}{1000}\right)^{19} \simeq$$

$$\simeq 1 - 0{,}8866 - 0{,}1070 \simeq 0{,}0064 \simeq 0{,}64\%.$$