Risoluzione della verifica IN UN'ORA - PRIMA PROVA

1 Calcoliamo inizialmente in quanti modi diversi possono sedersi 6 persone in 6 sedie numerate da 1 a 6. Partendo dalla prima sedia abbiamo 6 persone che possono occuparla, per la seconda 5, per la terza 4 e così via, fino all'ultima per la quale rimane una sola persona da collocare.
In definitiva otteniamo che i modi in cui possono disporsi 6 persone in 6 sedie ordinate sono 6!.

Applichiamo il risultato appena trovato al nostro problema.
Scegliamo una sedia qualsiasi, fissiamola come prima sedia e poi proseguiamo in ordine orario.
Se scegliessimo un'altra come sedia iniziale, i 6! modi di sedersi delle persone si ripeterebbero perché dipendono solo dai vicini e non dalla posizione rispetto al tavolo.
Quindi, per calcolare in quanti modi possono sedersi 6 persone attorno a un tavolo circolare, dobbiamo dividere il risultato precedente per 6, cioè per i modi in cui possiamo scegliere la prima sedia. Otteniamo quindi $\frac{6!}{6} = 5! = 120$.

---

2 Le 50 palline numerate dell'urna sono così composte: dalla 1 alla 10 sono gialle, dalla 11 alla 35 sono blu, dalla 36 alla 50 sono rosse.

a) L'evento «*la prima pallina estratta è blu*» è un evento certo perché già accaduto.
Consideriamo gli eventi:

E_1 = «*la prima pallina estratta è blu e ha numero pari*»,
E_2 = «*la prima pallina estratta è blu e ha numero dispari*»,

che hanno probabilità, rispettivamente,

$$p(E_1) = \frac{12}{25} \text{ e } p(E_2) = \frac{13}{25}.$$

I due eventi sono tra loro incompatibili e la loro somma è l'evento «*la prima pallina estratta è blu*», ossia l'evento certo. Possiamo, quindi, utilizzare la formula di disintegrazione e scrivere l'evento:

E = «*la prima pallina estratta è blu e la seconda pallina estratta ha numero pari*»

come $E = (E \cap E_1) \cup (E \cap E_2)$.

Gli eventi:

$E \cap E_1$ = «*la prima pallina estratta è blu, ha numero pari e la seconda pallina ha numero pari*»,
$E \cap E_2$ = «*la prima pallina estratta è blu, ha numero dispari e la seconda pallina ha numero pari*»,

sono tra loro incompatibili e hanno probabilità $p(E \cap E_1) = \frac{24}{49}$ e $p(E \cap E_2) = \frac{25}{49}$.

Abbiamo, quindi:

$$p(E) = p\big((E \cap E_1) \cup (E \cap E_2)\big) = p(E_1) \cdot p(E \mid E_1) + p(E_2) \cdot p(E \mid E_2) = \frac{12}{25} \cdot \frac{24}{49} + \frac{13}{25} \cdot \frac{25}{49} = \frac{613}{1225}.$$

b) Le tre estrazioni sono tre eventi indipendenti perché la pallina viene sempre reinserita nell'urna. Inoltre non interessa l'ordine di uscita, quindi dobbiamo tener conto dei possibili modi di uscita dei tre colori. Pertanto abbiamo:

$$p = 3! \cdot \frac{10}{50} \cdot \frac{25}{50} \cdot \frac{15}{50} = 6 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{50}.$$

c) Dobbiamo calcolare la probabilità di ottenere almeno una pallina gialla su 30 estrazioni con reimmissione, dobbiamo quindi calcolare la probabilità dell'evento contrario l'evento «*non esce mai una pallina gialla in 30 estrazioni*».

Applichiamo, pertanto, la formula di Bernoulli per determinare la probabilità dell'evento contrario (30 insuccessi):

$$p(\text{«non esce mai una pallina gialla in 30 estrazioni»}) = \binom{30}{0}\left(\frac{10}{50}\right)^0\left(\frac{40}{50}\right)^{30} = \left(\frac{4}{5}\right)^{30},$$

e calcoliamo poi la probabilità dell'evento dato:

$$p(\text{«esce almeno una pallina gialla in 30 estrazioni»}) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{30}.$$

d) La pallina è stata estratta quindi l'evento è già accaduto. Pertanto possiamo applicare il teorema di Bayes. Indicando con E l'evento «*la pallina estratta è blu*» e con F l'evento «*la pallina estratta ha numero* ≤ 30», abbiamo che la probabilità richiesta è:

$$p(E \mid F) = \frac{p(E)\cdot p(F\mid E)}{p(F)} = \frac{\frac{25}{50}\cdot\frac{20}{25}}{\frac{30}{50}} = \frac{2}{3}.$$

---

3 Risolviamo la disequazione:

$$2\binom{x-1}{4} \leq 5\binom{x-1}{x-3}$$

sfruttando le proprietà dei coefficienti binomiali.

Determiniamo inizialmente le condizioni d'esistenza della variabile $x \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x-1 \geq 4 \\ x-1 \geq x-3 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ \forall x \\ x \geq 3 \end{cases} \rightarrow x \geq 5.$$

Per la legge delle classi complementari, abbiamo:

$$2\binom{x-1}{4} \leq 5\binom{x-1}{x-3} \rightarrow 2\binom{x-1}{4} \leq 5\binom{x-1}{x-1-x+3} \rightarrow 2\binom{x-1}{4} \leq 5\binom{x-1}{2}.$$

Utilizziamo ora la legge dei tre fattoriali:

$$2\binom{x-1}{4} \leq 5\binom{x-1}{2} \rightarrow 2\cdot\frac{(x-1)!}{4!(x-5)!} \leq 5\cdot\frac{(x-1)!}{2!(x-3)!} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{(x-5)!} \leq \frac{5}{2(x-3)(x-4)(x-5)!} \rightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{5}{(x-3)(x-4)} \rightarrow x^2-7x+12 \leq 30 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2-7x-18 \leq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 9.$$

Mettendo a sistema le soluzioni con le condizioni d'esistenza, otteniamo $5 \leq x \leq 9 \wedge x \in \mathbb{N}$, ossia le soluzioni sono $S = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

---

4 Rappresentiamo graficamente il problema.

La circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x = 0$ ha centro in $(2; 0)$ e raggio 2, quindi la sua area misura:

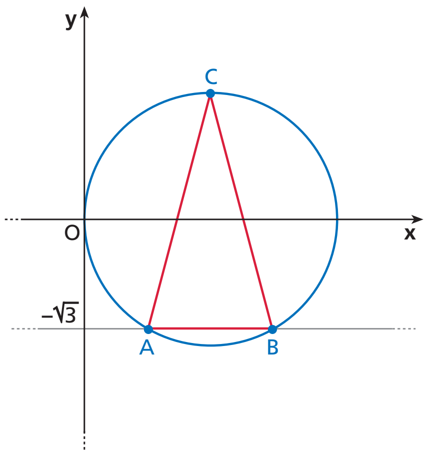
$$A_C = 4\pi.$$

Intersecando l'equazione della circonferenza con quella della retta $y = -\sqrt{3}$, otteniamo che il triangolo ABC ha la base di vertici $A(1; -\sqrt{3})$ e $B(3; -\sqrt{3})$ la cui misura è $\overline{AB} = 2$.

L'altezza relativa alla base di un triangolo isoscele inscritto in una circonferenza è un segmento perpendicolare

alla base passante per il centro della circonferenza, pertanto il terzo vertice ha coordinate $C(2; 2)$.
L'altezza del triangolo è quindi $h = 2 + \sqrt{3}$ e la sua area misura:

$$A_T = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 + \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3}.$$



Infine, la probabilità che un punto interno alla circonferenza sia esterno al triangolo è la probabilità contraria a quella che il punto sia interno a entrambe le figure. Abbiamo quindi:

$$p = 1 - \frac{A_T}{A_C} = 1 - \frac{2 + \sqrt{3}}{4\pi}.$$