Risoluzione dei problemi

1 **a)** Consideriamo gli eventi:

E_1 = «*la persona considerata ha meno di 65 anni*»,
E_2 = «*la persona considerata ha 65 anni o più*»,
E = «*la persona considerata è stata vaccinata*».

Per la formula di disintegrazione abbiamo:

$$p(E) = p(E \cap E_1) + p(E \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E \mid E_1) + p(E_2) \cdot p(E \mid E_2) =$$

$$= \frac{80}{100} \cdot \frac{15}{100} + \frac{20}{100} \cdot \frac{75}{100} = \frac{27}{100} = 27\%.$$

b) Scegliamo una persona vaccinata, quindi l'evento E si è verificato e dobbiamo calcolare la probabilità condizionata $p(E_2 \mid E)$. Utilizziamo il teorema di Bayes:

$$p(E_2 \mid E) = \frac{p(E_2) \cdot p(E \mid E_2)}{p(E)} = \frac{\frac{20}{100} \cdot \frac{75}{100}}{\frac{80}{100} \cdot \frac{15}{100} + \frac{20}{100} \cdot \frac{75}{100}} = \frac{15}{100} \cdot \frac{100}{27} = \frac{5}{9} \simeq 55{,}5\%.$$

c) Considerando 10 persone che hanno almeno 65 anni, dobbiamo calcolare la probabilità di ottenere 10 successi (tutte le persone sono vaccinate) su 10 prove. Utilizziamo la formula di Bernoulli:

$$p = \binom{10}{10}\left(\frac{75}{100}\right)^{10}\left(\frac{25}{100}\right)^{0} \simeq 5{,}6\%.$$

d) Considerando 10 persone che hanno almeno 65 anni, dobbiamo calcolare la probabilità di ottenere 6 successi (persone vaccinate) su 10 prove. Utilizziamo sempre la formula di Bernoulli:

$$p = \binom{10}{6}\left(\frac{75}{100}\right)^{6}\left(\frac{25}{100}\right)^{4} \simeq 210 \cdot 0{,}17798 \cdot 0{,}00391 \simeq 14{,}6\%.$$

e) Considerando 10 persone che hanno almeno 65 anni, dobbiamo calcolare la probabilità di ottenere almeno 6 successi (persone vaccinate) su 10 prove. Utilizziamo la formula di Bernoulli per determinare la probabilità di ogni caso favorevole e poi sommiamoli.

$$p_6 = \binom{10}{6}\left(\frac{75}{100}\right)^{6}\left(\frac{25}{100}\right)^{4} \simeq 14{,}6\%,$$

$$p_7 = \binom{10}{7}\left(\frac{75}{100}\right)^{7}\left(\frac{25}{100}\right)^{3} \simeq 120 \cdot 0{,}13348 \cdot 0{,}01563 \simeq 25{,}0\%,$$

$$p_8 = \binom{10}{8}\left(\frac{75}{100}\right)^{8}\left(\frac{25}{100}\right)^{2} \simeq 45 \cdot 0{,}10011 \cdot 0{,}0625 \simeq 28{,}2\%,$$

$$p_9 = \binom{10}{9}\left(\frac{75}{100}\right)^{9}\left(\frac{25}{100}\right)^{1} \simeq 10 \cdot 0{,}07508 \cdot 0{,}25 \simeq 18{,}8\%,$$

$$p_{10} = \binom{10}{10}\left(\frac{75}{100}\right)^{10}\left(\frac{25}{100}\right)^{0} \simeq 5{,}6\%.$$

Pertanto la probabilità cercata è $p \simeq 14{,}6\% + 25{,}0\% + 28{,}2\% + 18{,}8\% + 5{,}6\% = 92{,}2\%$.

2 **a)** Perché la funzione $f(x) = ae^{-\frac{|x-2|}{2}}$ rappresenti una densità di probabilità di una qualche variabile casuale continua X in $\mathbb{R}$, occorre che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

Deve essere $a \neq 0$, altrimenti l'integrale sarebbe nullo, quindi abbiamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \to \int_{-\infty}^{+\infty} ae^{-\frac{|x-2|}{2}}\,dx = 1 \to \int_{-\infty}^{2} e^{\frac{x-2}{2}}\,dx + \int_{2}^{+\infty} e^{\frac{-x+2}{2}}\,dx = \frac{1}{a} \to$$

$$\to \left[2e^{\frac{x-2}{2}}\right]_{-\infty}^{2} + \left[-2e^{\frac{-x+2}{2}}\right]_{2}^{+\infty} = \frac{1}{a} \to 2 + 2 = \frac{1}{a} \to a = \frac{1}{4}.$$

La funzione densità è quindi $f(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{|x-2|}{2}}$.

b) Studiamo il grafico di $f(x)$.

- $D = \mathbb{R}$;
- $f(x) > 0 \ \forall x \in D$;
- $x = 0 \to y = \frac{1}{4e}$;
- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \to y = 0$ è asintoto orizzontale;
- $f(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{4}e^{\frac{x-2}{2}} = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{4}e^{\frac{-x+2}{2}} = \frac{1}{4} \to$ la funzione è continua in $x = 2$.
- Calcoliamo le due derivate, per $x < 2$ e per $x > 2$:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}e^{\frac{x-2}{2}} & \text{se } x < 2 \\ -\frac{1}{8}e^{\frac{-x+2}{2}} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

La funzione è crescente in $x < 2$ e decrescente in $x > 2$.

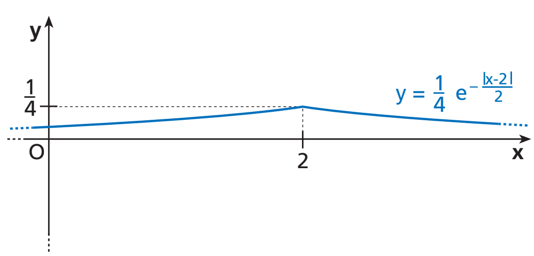
In $x = 2$, $f(x)$ non è derivabile in quanto $f'_-(2) = \frac{1}{8}$ e $f'_+(2) = -\frac{1}{8}$.

La funzione ha quindi un punto di massimo angoloso in $x = 2$.

- $$f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}e^{\frac{x-2}{2}} & \text{se } x < 2 \\ \frac{1}{16}e^{\frac{-x+2}{2}} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

quindi la funzione ha sempre la concavità rivolta verso l'alto.

Il grafico della funzione è in figura a lato.



c) Per determinare il valor medio della variabile X, dobbiamo calcolare l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{|x-2|}{2}}\,dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{2} xe^{\frac{x-2}{2}}\,dx + \frac{1}{4}\int_{2}^{+\infty} xe^{\frac{-x+2}{2}}\,dx.$$

Risolviamo per parti entrambi gli integrali:

$$\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{2} xe^{\frac{x-2}{2}}\,dx = \left[\frac{1}{2}xe^{\frac{x-2}{2}}\right]_{-\infty}^{2} - \int_{-\infty}^{2} \frac{1}{2}e^{\frac{x-2}{2}}\,dx = 1 - \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}xe^{\frac{x-2}{2}} - \left[e^{\frac{x-2}{2}}\right]_{-\infty}^{2} = 1 - 1 = 0,$$

$$\frac{1}{4}\int_2^{+\infty} xe^{\frac{-x+2}{2}}\,dx = \left[-\frac{1}{2}xe^{\frac{-x+2}{2}}\right]_2^{+\infty} - \int_2^{+\infty} -\frac{1}{2}e^{\frac{-x+2}{2}}\,dx =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}xe^{\frac{-x+2}{2}} + 1 - \left[e^{\frac{-x+2}{2}}\right]_2^{+\infty} = 1 + 1 = 2.$$

Pertanto abbiamo $\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx = 2$.

Per determinare la varianza di X dobbiamo calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty}(x-2)^2\cdot f(x)\,dx$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x-2)^2\cdot f(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-2)^2\cdot e^{-\frac{|x-2|}{2}}\,dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\cdot e^{-\frac{|t|}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^2\cdot e^{-\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= \left[-t^2e^{-\frac{t}{2}}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2t\cdot e^{-\frac{t}{2}}\,dt = \left[-4te^{-\frac{t}{2}}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 4e^{-\frac{t}{2}}\,dt = \left[-8e^{-\frac{t}{2}}\right]_0^{+\infty} = 8.$$

d) Per determinare la funzione di ripartizione di X dobbiamo calcolare una primitiva di $f(x)$. Distinguiamo due casi:

$$F(X) = P(X \le x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{4}e^{\frac{t-2}{2}}\,dt & \text{se } x \le 2 \\ \int_{-\infty}^{2} \frac{1}{4}e^{\frac{t-2}{2}}\,dt + \int_2^x \frac{1}{4}e^{\frac{-t+2}{2}}\,dt & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

$$F(X) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\frac{x-2}{2}} & \text{se } x \le 2 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{\frac{-x+2}{2}} + \frac{1}{2} & \text{se } x > 2 \end{cases} \to F(X) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\frac{x-2}{2}} & \text{se } x \le 2 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{\frac{-x+2}{2}} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Risoluzione dei quesiti

1 Il numero delle giocate possibili è il numero dei modi in cui possiamo compilare una schedina quindi, poiché ci sono 3 possibilità per ogni riga e le righe sono 14, in totale ci sono 3^{14} giocate possibili.

Nel riempire due colonne della schedina non teniamo conto dell'ordine e non ammettiamo ripetizioni, cioè le schedine con due colonne uguali non sono giocate valide.

Le schedine valide sono, pertanto, $C_{3^{14},2} = \frac{3^{14}(3^{14}-1)}{2}$.

---

2 Dobbiamo dimostrare che i termini $\binom{n}{k}$ e $\binom{n}{n-k}$ sono uguali, dobbiamo cioè provare la legge delle classi complementari.

Calcoliamo direttamente i coefficienti binomiali, utilizzando la legge dei tre fattoriali:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Abbiamo ottenuto le stesse espressioni quindi $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

3 La circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = r^2$ ha centro in $O(0; 0)$, raggio r e area $A_C = \pi r^2$.

Il triangolo equilatero inscritto in una circonferenza ha lato $l = r\sqrt{3}$, pertanto la sua area è:

$$A_T = \frac{1}{2} \cdot r\sqrt{3} \cdot \frac{3r}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{3}\, r^2.$$

La probabilità che un punto interno alla circonferenza sia esterno al triangolo è la probabilità contraria a quella che un punto interno alla circonferenza sia interno anche al triangolo:

$$p = 1 - \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4} r^2}{\pi r^2} = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

---

4 La probabilità richiesta è la probabilità di ottenere almeno un successo (esce il numero 6) su 2 prove ripetute (2 lanci di dado). Quindi è l'evento contrario a non ottenere alcun successo.
Calcoliamo la probabilità dell'evento contrario con la formula di Bernoulli:

$$p(\text{«}\textit{non esce mai il 6}\text{»}) = \binom{2}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}.$$

La probabilità cercata è quindi $p = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

Pertanto la proposizione è falsa.

---

5 Consideriamo gli eventi:

E = «*lo studente è insufficiente in matematica*»,
F = «*lo studente è insufficiente in fisica*»,
$E \cap F$ = «*lo studente è insufficiente in matematica e in fisica*».

Per calcolare la probabilità che uno studente sia sufficiente in entrambe le materie, dobbiamo considerare l'intersezione degli eventi contrari agli eventi E ed F:

$$p(\overline{E} \cap \overline{F}) = p(\overline{E \cup F}) = 1 - p(E \cup F) = 1 - \left(\frac{35}{100} + \frac{20}{100} - \frac{15}{100}\right) = \frac{60}{100} = 60\%.$$

Dobbiamo calcolare:

$$p(F \mid E) = \frac{p(E \cap F)}{p(E)} = \frac{\frac{15}{100}}{\frac{35}{100}} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7} \simeq 42{,}9\%.$$

---

6 La probabilità di ottenere un pezzo difettoso è $p = \frac{80}{4000} = \frac{1}{50} = 2\%$.

Calcoliamo la probabilità di ottenere al massimo 2 pezzi difettosi su 200 pezzi esaminati con la formula di Bernoulli:

$$p_0 = p\,(\text{«}\textit{nessun pezzo difettoso}\text{»}) = \binom{200}{0}\left(\frac{1}{50}\right)^0\left(\frac{49}{50}\right)^{200} \simeq 1{,}76\%.$$

$$p_1 = p\,(\text{«}\textit{1 pezzo difettoso}\text{»}) = \binom{200}{1}\left(\frac{1}{50}\right)^1\left(\frac{49}{50}\right)^{199} \simeq 7{,}18\%.$$

$$p_2 = p\,(\text{«}\textit{2 pezzi difettosi}\text{»}) = \binom{200}{2}\left(\frac{1}{50}\right)^2\left(\frac{49}{50}\right)^{198} \simeq 14{,}6\%.$$

$$p = p_0 + p_1 + p_2 \simeq 23{,}54\%.$$