

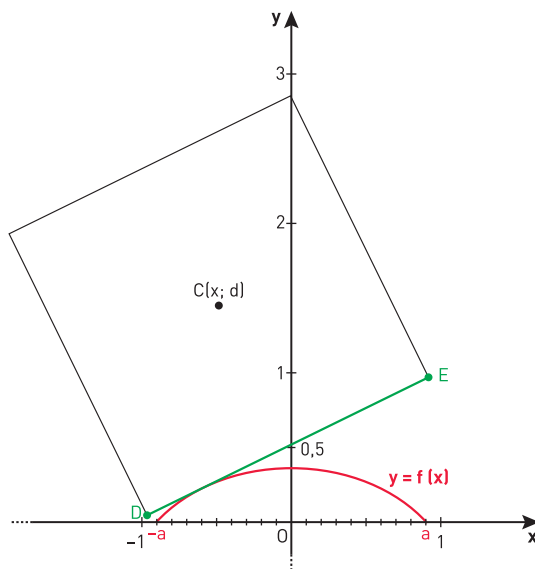
ESAME DI STATO 2017
TEMA DI MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

Problema 1

Si può pedalare agevolmente su una bicicletta a ruote quadrate? A New York, al MoMath-Museum of Mathematics si può fare, in uno dei padiglioni dedicati al divertimento matematico. È però necessario che il profilo della pedana su cui il lato della ruota può scorrere soddisfi alcuni requisiti.

In figura è riportata una rappresentazione della situazione nel piano cartesiano Oxy : il quadrato di lato $DE = 2$ (in opportune unità di misura) e di centro C rappresenta la ruota della bicicletta, il grafico della funzione $f(x)$ rappresenta il profilo della pedana.

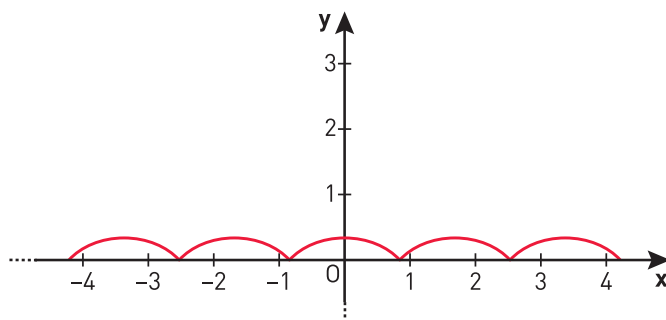


1. Sulla base delle informazioni ricavabili dal grafico in figura, mostra, con le opportune argomentazioni, che la funzione:

$$f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

rappresenta adeguatamente il profilo della pedana per $x \in [-a; a]$; determina inoltre il valore degli estremi a e $-a$ dell'intervallo.

Per visualizzare il profilo completo della pedana sulla quale la bicicletta potrà muoversi, si affiancano varie copie del grafico della funzione $f(x)$ relativo all'intervallo $[-a; a]$, come mostrato in figura.



2. Perché la bicicletta possa procedere agevolmente sulla pedana è necessario che:

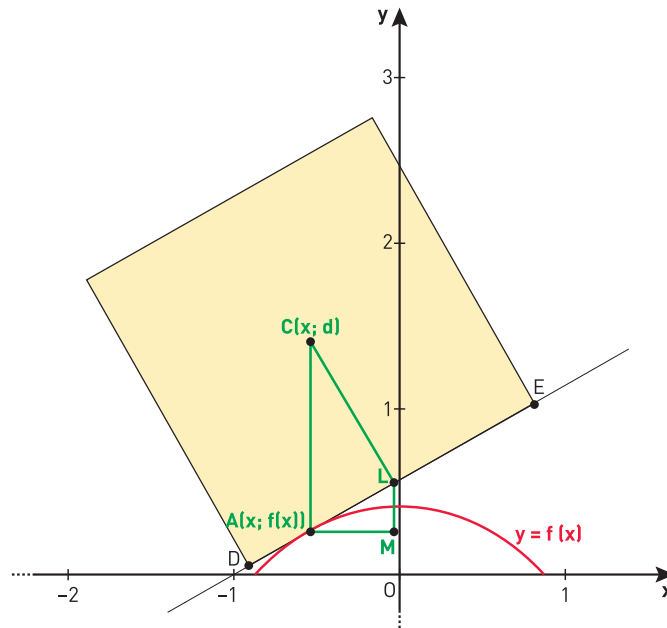
- a sinistra e a destra dei punti di non derivabilità i tratti del grafico siano ortogonali;
- la lunghezza del lato della ruota quadrata risulti pari alla lunghezza di una “gobba”, cioè dell’arco di curva di equazione

$$y = f(x) \text{ per } x \in [-a; a].$$

Stabilisci se tali condizioni sono verificate¹.

3. Considerando la similitudine dei triangoli rettangoli ACL e ALM in figura, e ricordando il significato geometrico della derivata, verifica che il valore dell’ordinata d del centro della ruota si mantiene costante durante il moto. Pertanto, al ciclista sembra di muoversi su una superficie piana.

¹In generale, la lunghezza dell’arco di curva avente equazione $y = \varphi(x)$ compreso tra le ascisse x_1 e x_2 è data da $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx$.



Anche il grafico della funzione:

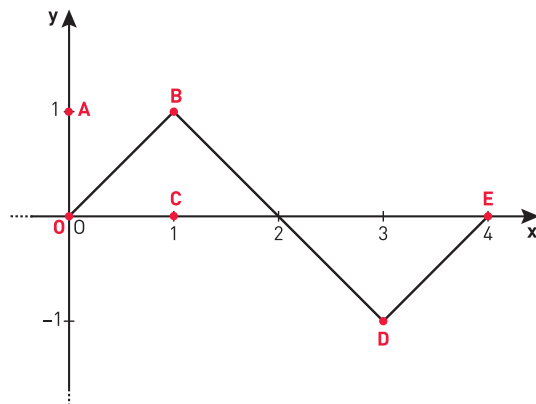
$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{per } x \in \left[-\frac{\ln(3)}{2}; \frac{\ln(3)}{2}\right]$$

se replicato varie volte, può rappresentare il profilo di una pedana adatta a essere percorsa da una bicicletta con ruote molto particolari, aventi la forma di un poligono regolare.

4. Individua tale poligono regolare, motivando la risposta.

Problema 2

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo $T = 4$ il cui grafico, nell'intervallo $[0; 4]$, è il seguente:



Come si evince dalla figura, i tratti OB , BD , DE del grafico sono segmenti i cui estremi hanno coordinate: $O(0; 0)$, $B(1; 1)$, $D(3; -1)$, $E(4; 0)$.

- 1) Stabilisci in quali punti del suo insieme di definizione la funzione f è continua e in quali è derivabile e verifica l'esistenza dei limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x};$$

qualora esistano, determinarne il valore.

Rappresenta inoltre, per $x \in [0; 4]$, i grafici delle funzioni:

$$g(x) = f'(x)$$

$$h(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

- 2) Considera la funzione:

$$s(x) = \sin(bx)$$

con b costante reale positiva; determina b in modo che $s(x)$ abbia lo stesso periodo di $f(x)$. Dimostra che la porzione quadrata di piano $OABC$ in figura 1 viene suddivisa dai grafici di $f(x)$ e $s(x)$ in 3 parti distinte e determina le probabilità che un punto preso a caso all'interno del quadrato $OABC$ ricada in ciascuna delle 3 parti individuate.

3) Considerando ora le funzioni:

$$f(x)^2 \text{ e } s(x)^2$$

discuti, anche con argomentazioni qualitative, le variazioni (in aumento o in diminuzione) dei 3 valori di probabilità determinati al punto precedente.

4) Determina infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione h per $x \in [0; 3]$ e l'asse delle x .

Questionario

1. Definito il numero E come:

$$E = \int_0^1 x e^x dx,$$

dimostrare che risulta:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2E,$$

ed esprimere

$$\int_0^1 x^3 e^x dx$$

in termini di e ed E .

2. Una torta di forma cilindrica è collocata sotto una cupola di plastica di forma emisferica. Dimostrare che la torta occupa meno dei $3/5$ del volume della emisfera.

3. Sapendo che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax + 2b} - 6}{x} = 1$$

determinare i valori di a e b .

4. Per sorteggiare numeri reali nell'intervallo $[0; 2]$ viene realizzato un generatore di numeri casuali che fornisce numeri distribuiti, in tale intervallo, con densità di probabilità data dalla funzione:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3$$

Quale sarà il valore medio dei numeri generati?

Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia $\frac{4}{3}$?

Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1?

5. Dati i punti $A(-2; 3; 1)$, $B(3; 0; -1)$, $C(2; 2; -3)$, determinare l'equazione della retta r passante per A e per B e l'equazione del piano π perpendicolare ad r e passante per C .

6. Determinare il numero reale a in modo che il valore di

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^a}$$

sia un numero reale non nullo.

7. Determinare le coordinate dei centri delle sfere di raggio $\sqrt{6}$ tangenti al piano π di equazione:

$$x + 2y - z + 1 = 0$$

nel suo punto P di coordinate $(1; 0; 2)$.

8. Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Determinare il valore di p in percentuale e calcolare la probabilità che in 5 lanci del dado la faccia 3 esca almeno 2 volte.

9. Dimostrare che l'equazione:

$$\arctan x + x^3 + e^x = 0$$

ha una e una sola soluzione reale.

10. Data la funzione:

$$f(x) = |4 - x^2|$$

verificare che essa non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-3; 3]$ e che comunque esiste almeno un punto dell'intervallo $[-3; 3]$ in cui la derivata prima di $f(x)$ si annulla. Questo esempio contraddice il teorema di Rolle? Motivare la risposta in maniera esauriente.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (D.M. n. 257 Art. 18 comma 8).

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.