

SOLUZIONE DEL QUESITO 7
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2017

I centri delle sfere tangenti a $\pi : x + 2y - z + 1 = 0$ nel suo punto $P(1; 0; 2)$ appartengono alla retta perpendicolare a π passante per P .

Il vettore perpendicolare a un piano generico di equazione $ax + by + cz + d = 0$ è $\vec{n}(a; b; c)$, quindi il vettore perpendicolare a π ha coordinate $\vec{n}(1; 2; -1)$.

I centri delle sfere cercate appartengono quindi alla retta r che ha direzione $\vec{n}(1; 2; -1)$ e passa per il punto $P(1; 0; 2)$ e ha equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 0 + 2k \\ z = 2 - k \end{cases}$$

Adesso dobbiamo imporre che il raggio delle sfera sia $\sqrt{6}$ ovvero che la distanza del punto $P(1; 0; 2)$ da un punto generico di r sia $\sqrt{6}$.

$$\sqrt{(1+k-1)^2 + (2k-0)^2 + (2-k-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$k^2 + 4k^2 + k^2 = 6$$

$$k = \pm 1$$

Sostituendo k nelle equazioni parametriche di r troviamo i centri cercati:

$$C_1 : \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \quad C_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$