

**SOLUZIONE DEL QUESITO 9**  
**TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2016**

Denotiamo con  $r_1$  la retta espressa in forma parametrica e con  $r_2$  quella in forma cartesiana e analizziamo la posizione reciproca tra le due rette e il punto  $P$  dato. Osserviamo che  $P$  non appartiene né a  $r_1$ , né a  $r_2$ , infatti, sostituendo a  $x, y, z$ , rispettivamente, i valori 1,0,-2, entrambi i sistemi risultano impossibili. Per vedere se  $r_1$  e  $r_2$  sono coincidenti, incidenti o disgiunte (parallele o sghembe), studiamo il sistema seguente in 5 equazioni e 4 incognite:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Otteniamo:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ t + 2t + t - 3 = 0 \\ 2t - 2t = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ t = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Poiché esiste ed è unico il valore di  $t$  per cui il sistema ha soluzione, possiamo concludere che  $r_1$  ed  $r_2$  sono incidenti e il loro punto d'intersezione è  $Q\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)$ .

Allora esiste un piano  $\sigma$  che contiene  $r_1$  ed  $r_2$ . L'equazione del piano  $\pi$  passante per  $P$  e parallelo alle due rette è il piano per  $P$  parallelo a  $\sigma$ . Per calcolare l'equazione di  $\sigma$  possiamo procedere in due modi diversi:

**Primo metodo:** Consideriamo un piano generico espresso in forma cartesiana

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \text{con } (a; b; c) \neq (0; 0; 0)$$

e imponiamo il passaggio per  $r_1$  ed  $r_2$ . Poiché  $r_1$  ed  $r_2$  sono incidenti e ogni retta è univocamente determinata da due suoi punti, è sufficiente imporre il passaggio del piano per  $Q$ , che appartiene ad entrambe, per un altro punto di  $r_1$ , ad esempio,  $Q_1(0; 0; 0)$ , e per un altro punto di  $r_2$ , ad esempio,  $Q_2(0; 0; 3)$ . Quindi studiamo il sistema:

$$\begin{cases} a \cdot \frac{3}{4} + b \cdot \frac{3}{2} + c \cdot \frac{3}{4} + d = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 3 + d = 0. \end{cases}$$

da cui  $a = -2b, c = d = 0$ . Scegliendo  $b = 1$ , otteniamo  $\sigma : 2x - y = 0$ .

**Secondo metodo:** Consideriamo il fascio di piani passanti per  $r_2$ ,

$$\sigma_{\lambda\mu} : \lambda(x + y + z - 3) + \mu(2x - y) = 0, \quad \text{con } (\lambda; \mu) \neq (0; 0)$$

e imponiamo il passaggio per  $r_1$ . Poiché  $Q = r_1 \cap r_2, Q_1(0; 0; 0) \in r_1$ , per trovare  $\sigma$ , è sufficiente imporre il passaggio di  $\sigma_{\lambda\mu}$  per  $Q_1$ , cioè studiare il seguente sistema:

$$\begin{cases} \lambda(x + y + z - 3) + \mu(2x - y) = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

da cui  $\lambda = 0$ . Scegliendo  $\mu = 1$ , otteniamo  $\sigma : 2x - y = 0$ .

Ricordiamo che un piano  $ax + by + cz + d = 0$  è perpendicolare al vettore  $(a; b; c)$ . Nel nostro caso, il piano  $\sigma : 2x - y = 0$  è perpendicolare al vettore  $(2; -1; 0)$ . Di conseguenza, il piano  $\pi$  che stiamo cercando, deve essere perpendicolare allo stesso vettore, per poter essere parallelo a  $\sigma$ . Imponendo il passaggio per  $P$ :

$$\begin{cases} 2x - y + d = 0 \\ x = 1 \\ y = 0 \\ z = -2. \end{cases}$$

otteniamo  $a = 2, b = -1, c = 0, d = -2$ , cioè  $\pi : 2x - y = 2$ .

Alternativamente, trasformando la retta  $r_2$  in forma parametrica, cioè:

$$\begin{cases} x = s \\ y = 2s \\ z = 3 - 3s \end{cases}$$

osserviamo che  $r_2$  è parallela al vettore  $(1; 2; -3)$ . Ricordando che  $r_1$  è parallela al vettore  $(1; 2; 1)$ , il generico piano passante per  $P$ , cioè:

$$a(x - 1) + b(y - 0) + c(z + 2) = 0, \quad \text{con } (a; b; c) \neq (0; 0; 0)$$

è parallelo alle rette  $r_1$  ed  $r_2$  se il vettore  $(x - 1; y; z + 2)$  è parallelo a  $(1; 2; 1)$  e  $(1; 2; -3)$ . E questo è vero se e solo se

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y & z + 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando i calcoli, otteniamo come prima  $\pi : 2x - y - 2 = 0$ .