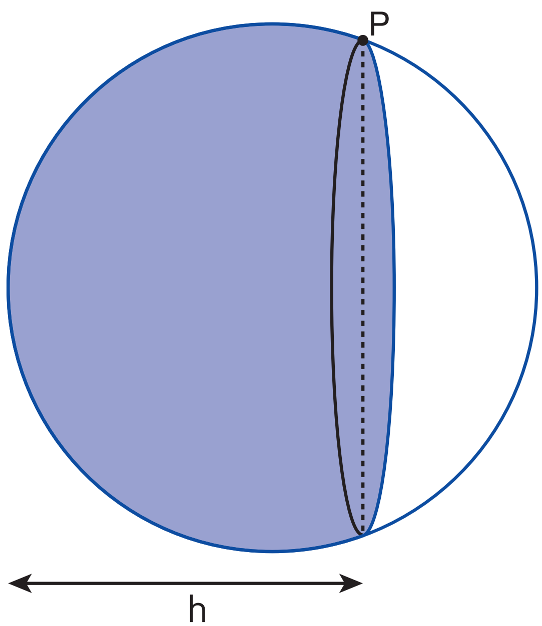
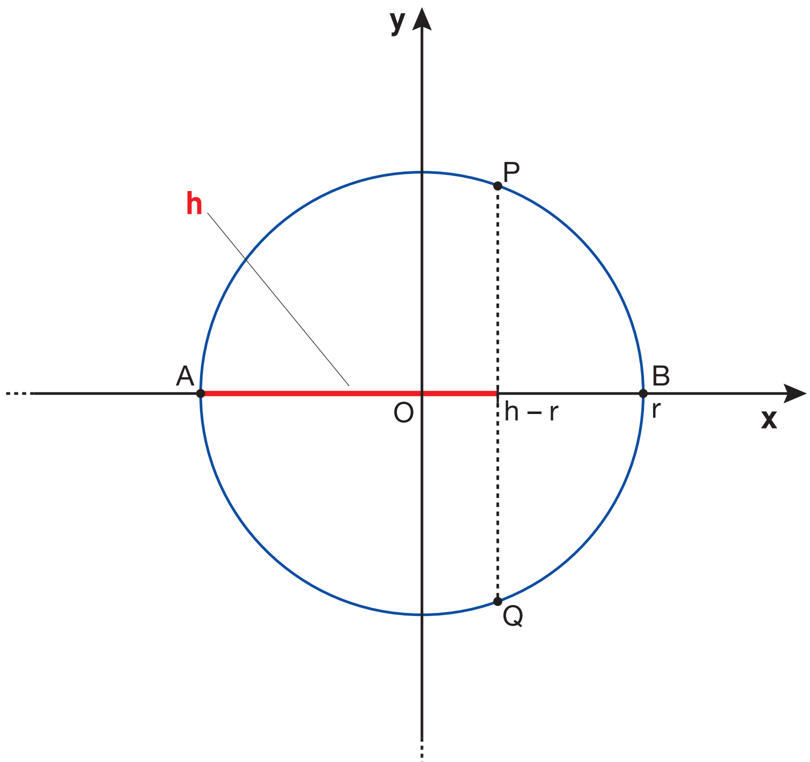
SOLUZIONE DEL QUESITO 3
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2016

Per comodità rappresentiamo il recipiente orientato orizzontalmente.



Il recipiente sferico di raggio r può essere rappresentato come la sfera ottenuta dalla rotazione di un angolo π di una circonferenza di equazione $x^2+y^2=r^2$, centrata nell'origine di un sistema cartesiano Oxy e di diametro $2r$.
Sia P il punto che rappresenta il livello raggiunto dal liquido. La sua ascissa vale $h-r$, con $h>r$.



Lo spazio occupato dal liquido nel recipiente corrisponde alla calotta sferica generata dalla rotazione dell'arco AP. Determiniamone il volume V.
L'equazione dell'arco AP è:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad \text{con } -r \leq x \leq h - r.$$

Calcoliamo il volume del recipiente sferico:

$$V = \pi \int_{-r}^{h-r} [f(x)]^2 dx = \pi \int_{-r}^{h-r} r^2 - x^2 dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{h-r} =$$

$$\pi \left[r^2(h-r) - \frac{(h-r)^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right] =$$

$$\pi \left[r^2 h - r^3 - \frac{h^3}{3} + \frac{r^3}{3} + h^2 r - h r^2 + r^3 - \frac{r^3}{3} \right] =$$

$$\pi \left(h^2 r - \frac{h^3}{3} \right).$$

