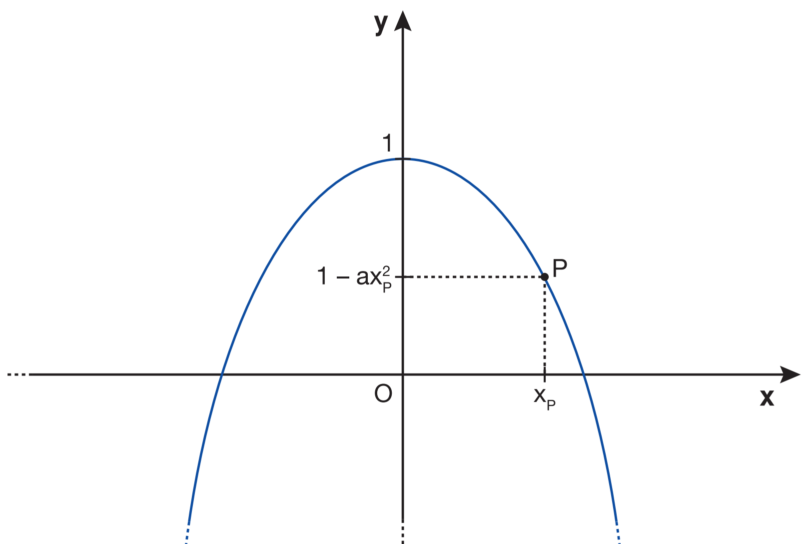
**SOLUZIONE DEL QUESITO 2**

**TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2016**

Per qualunque valore di $a > 0$ la parabola è simmetrica rispetto all'asse $y$, passa per il punto $(0; 1)$ e ha concavità verso il basso. Il punto generico $P$ della parabola ha coordinate $(x_P; 1 - a{x_P}^2)$.




Il rettangolo inscritto nel segmento parabolico delimitato dall'asse $x$ ha vertici di coordinate $A = (x_P; 0)$, $B = (x_P; 1 - a{x_P}^2)$, $C = (-x_P; 1 - a{x_P}^2)$ e infine $D = (-x_P; 0)$. Consideriamo $x_P > 0$.

Possiamo esprimere perimetro e area del rettangolo $ABCD$ come funzione dell'ascissa $x_P$:

$$2p(x_P) = 4x_P + 2(1 - a{x_P}^2) \to 2p(x_P) = -2a{x_P}^2 + 4x_P + 2;$$

$$A(x_P) = 2x_P(1 - a{x_P}^2) = 2(x_P - a{x_P}^3).$$

Per determinare per quale valore di $a$ l'area del rettangolo è massima calcoliamo la derivata prima della funzione che esprime l'area:

$$A'(x_P) = 2 - 6a{x_P}^2.$$

La condizione necessaria affinché il rettangolo di coordinate $ABCD$ abbia area massima è che la derivata prima calcolata in $x_P$ sia uguale a 0:

$$A'(x_P) = 0 \rightarrow 2 - 6a{x_P}^2 = 0 \rightarrow 3a{x_P}^2 = 1 \rightarrow x_P = \pm\frac{\sqrt{3a}}{3a}.$$

La radice esiste sempre poiché, per ipotesi, $a > 0$.
Siccome siamo interessati all'ascissa positiva consideriamo $x_P = \frac{\sqrt{3a}}{3a}$.
Procediamo allo stesso modo per determinare per quale valore di $x_P$ il perimetro assume valore massimo. Calcoliamo la derivata prima:

$$2p'(x_P) = -4ax_P + 4.$$

Imponiamo ora che la derivata prima del perimetro sia uguale a 0 in corrispondenza di $x_P$:

$$2p'(x_P) = 0 \rightarrow -4ax_P + 4 = 0 \rightarrow x_P = \frac{1}{a}.$$

Uguagliamo le due espressioni che abbiamo trovato per $x_P$ per determinare il valore di $a$:

$$\frac{\sqrt{3a}}{3a} = \frac{1}{a} \rightarrow a = 3.$$

L'equazione della parabola che soddisfa le condizioni del problema è:

$$y = 1 - 3x^2.$$