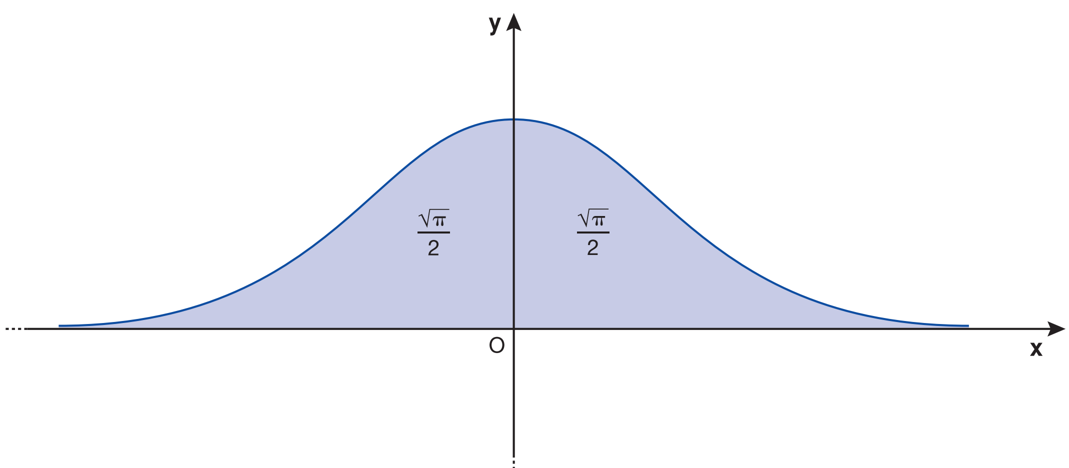
**SOLUZIONE DEL QUESITO 1**
**TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2016**

Osserviamo innanzitutto che l'integrale indefinito $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ non è risolvibile analiticamente. Di conseguenza, abbozziamo il grafico della funzione $f(x) = e^{-x^2}$.
Osserviamo che la funzione $f(x) = e^{-x^2}$ è una gaussiana centrata nell'origine. Ricordiamo le sue proprietà.
La funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$. È pari perché:

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

perciò il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse $y$. La funzione è positiva su tutto $\mathbb{R}$ perché è una funzione esponenziale. Ha un asintoto orizzontale, $y = 0$, perché $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = 0$. Infine, $f'(x) = -2xe^{-x^2} > 0$ se e solo se $x < 0$, ovvero la funzione è crescente in $]-\infty; 0[$ e decrescente in $]0; +\infty[$ e assume il suo massimo assoluto in 0.
Perciò il suo grafico è il seguente:




Notiamo che

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

La funzione $F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt$ è monotona crescente.

Infatti, $F'(x) = e^{-x^2} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Poiché $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ e $F(u) = 1 > \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, quindi $u > 0$.

Determiniamo i valori integrali $A$, $B$ e $C$.

Per calcolare l'integrale $A$, osserviamo che la funzione $f(x) = x^7 e^{-x^2}$ è dispari. Infatti,

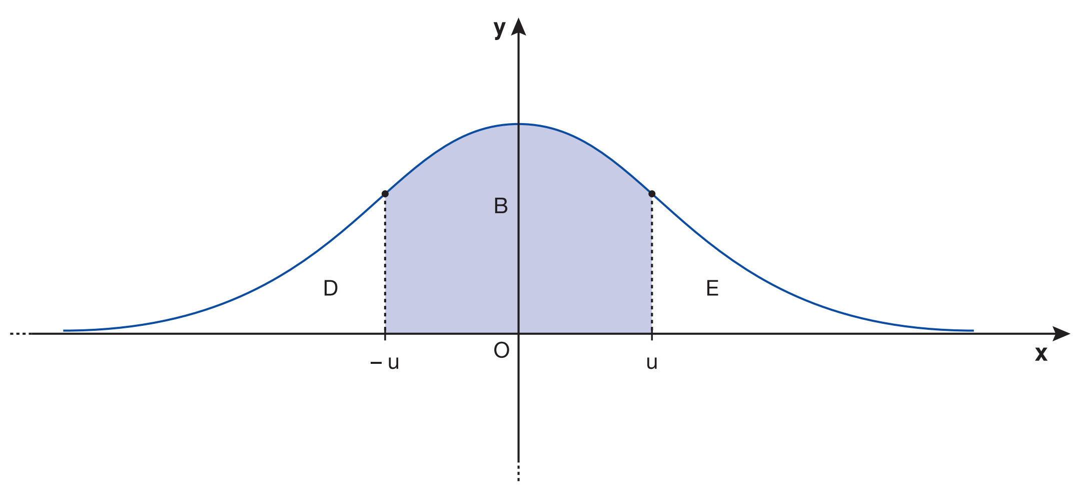
$$f(-x) = (-x)^7 e^{-(-x)^2} = -x^7 e^{-x^2} = -f(-x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Possiamo concludere che

$$\int_{-u}^{+u} x^7 e^{-x^2} dx = 0$$

perché $\int_{-u}^{0} x^7 e^{-x^2} dx = -\int_{0}^{u} x^7 e^{-x^2} dx$.

Per calcolare $B$, possiamo suddividere l'area al di sotto del grafico della funzione in tre parti, come in figura.




Notiamo che:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx - \int_{-\infty}^{u} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} - 1$$

e che $D = E$ per simmetria.
Di conseguenza:

$$B = \int_{-u}^{u} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx - 2E =$$
$$\sqrt{\pi} - 2(\sqrt{\pi} - 1) = 2 - \sqrt{\pi}.$$

Calcoliamo l'integrale $C$:

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{5}x)^2} dx.$$

Sostituiamo $y = \sqrt{5}x \rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{5}}$, $dx = \frac{dy}{\sqrt{5}}$, per $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow -\infty$ e per $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow +\infty$.
Quindi,

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \frac{dy}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{5}}.$$