

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2016

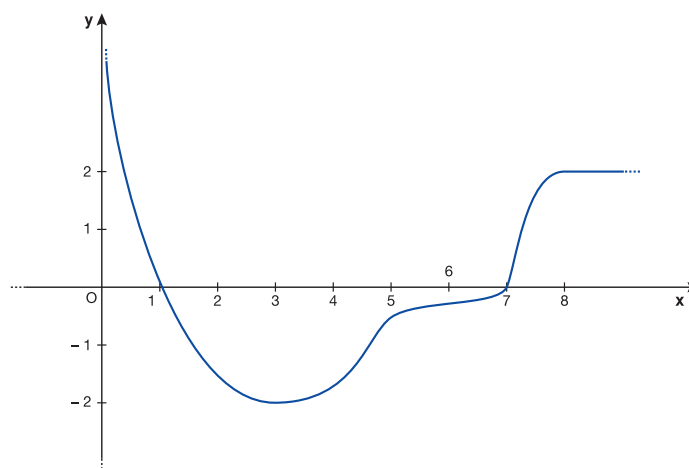
1. Per prima cosa determiniamo l'espressione analitica della funzione f per $x \geq 8$.

$$\frac{x-8}{2} = \frac{y}{4} \rightarrow y = 2x - 16$$

Del grafico di $f'(x)$ possiamo dire che:

- In $x = 0$ deve presentare un asintoto verticale; in particolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$. Questo perché il grafico fornito è tangente all'asse y nel punto A e a destra del punto f è crescente.
- In $x = 1$, f' deve essere nulla perché B è un punto stazionario di f .
- In $x = 3$ conosciamo la tangente e sappiamo che essa ha coefficiente angolare -2 . Pertanto $f'(3) = -2$. Il punto $(3; -2)$ è un minimo locale per la funzione f' ; infatti sappiamo dal testo che C è un flesso di f .
- Anche in $x = 5$ conosciamo la tangente; analogamente al punto sopra, possiamo affermare che $f'(5) = -\frac{1}{2}$.
- $f'(7) = 0$ perché E è un punto stazionario.
- Per $x \geq 8$ risulta che $f'(x) = 2$ perché la semiretta passante per F e G ha coefficiente angolare 2 .

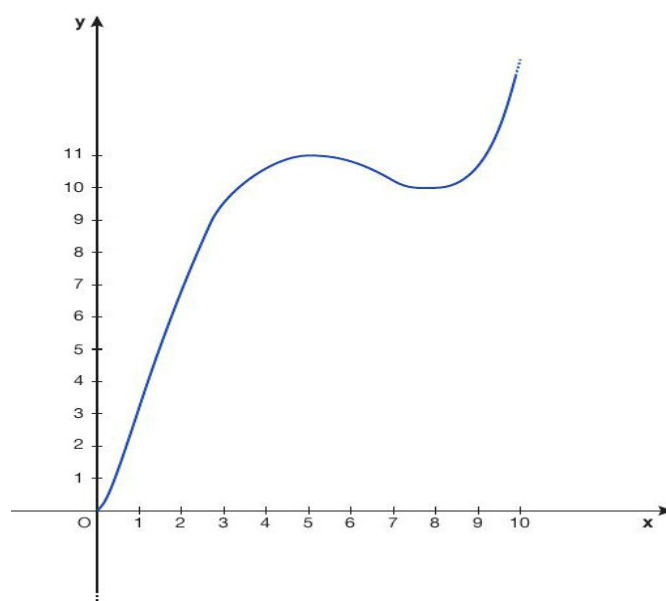
Possiamo dunque tracciare il grafico indicativo della funzione f' .



Per tracciare il grafico della funzione integrale F possiamo fare una serie di considerazioni.

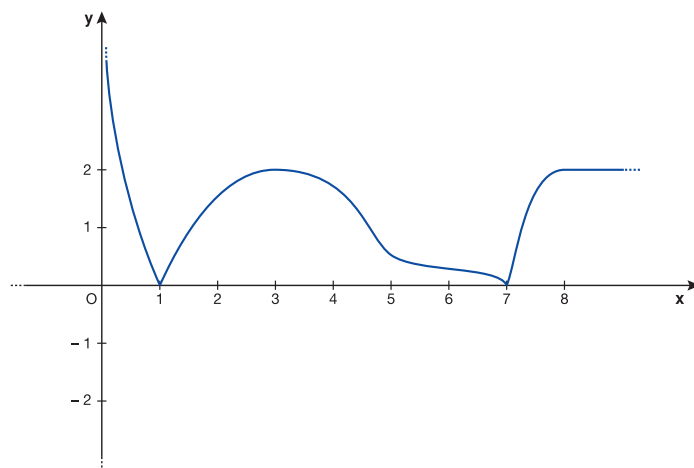
- Osserviamo che $F(5) = 11$ e $F(8) = 11 - 1 = 10$. Infatti $F(8) = \int_0^8 f(x)dx = \int_0^5 f(x)dx + \int_5^8 f(x)dx = 11 - 1 = 10$. Ai valori $x = 5$ e $x = 8$ corrisponderanno punti stazionari di F perché sono zeri di f .
- Sul piano qualitativo possiamo dire che in corrispondenza dei valori $x = 1$ e $x = 7$ F presenterà dei flessi perché in B e E f ha due punti stazionari.
- Per $x \geq 8$ il grafico di F avrà l'andamento della parabola di equazione $y = x^2 - 16x + 74$. Infatti su questo intervallo la funzione f coincide con la semiretta $y = 2x - 16$, dunque $F(x) = \int_0^8 f(t)dt + \int_8^x (2t - 16)dt = 10 + [t^2 - 16t]_8^x = x^2 - 16x + 74$.

Otteniamo quindi una funzione che ha l'andamento qualitativo sotto riportato.



Come già osservato in precedenza, conosciamo i valori di $f'(3) = -2$ e $f'(5) = -\frac{1}{2}$; li avevamo ricavati interpretando la pendenza delle due tangenti assegnate dal testo come valore della derivata di f .

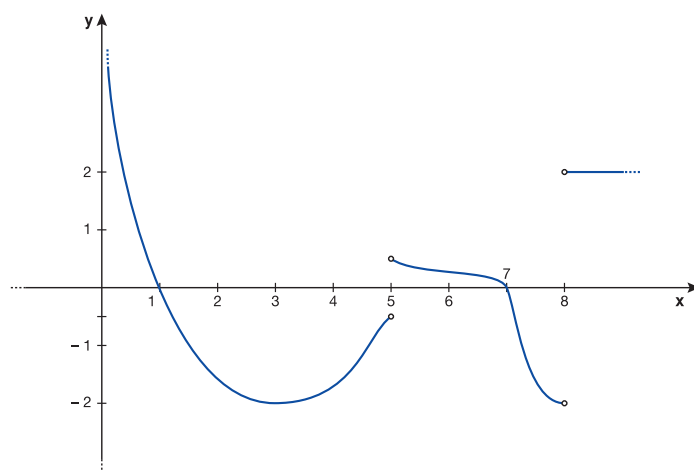
- Per ottenere il grafico di $y = |f'(x)|$ è sufficiente simmetrizzare i valori negativi di f' rispetto all'asse x , riportandoli dal quarto al primo quadrante.



L'insieme di definizione di $y = |f'(x)|$ coincide con quello di $y = f'(x)$, ed è dunque $]0; +\infty[$ (il valore $x = 0$ va escluso perché in corrispondenza di esso f presenta un asintoto verticale).

- Per ottenere il grafico di $y = |f'(x)|'$ distinguiamo i valori positivi di f da quelli negativi. Per i valori strettamente positivi $|f| = f$, dunque $|f'| = f'$: il grafico ha l'andamento già mostrato sopra. Per i valori strettamente negativi, $|f| = -f$, dunque $|f'| = -f'$: il grafico si ottiene sottoponendo quello di f' alla simmetria di asse x già menzionata in precedenza.

Il grafico cercato ha il seguente andamento qualitativo.



I valori $x = 5$ e $x = 8$ in cui f risulta nulla non appartengono all'insieme di definizione di $|f'|$; infatti $\lim_{x \rightarrow 5^+} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 5^-} f'(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 8^+} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 8^-} f'(x)$ come emerge chiaramente dal grafico. L'insieme di definizione di $y = |f'|$ risulta quindi essere $]0; +\infty[- \{5; 8\}$.

- Tracciamo ora il grafico di $y = \frac{1}{f(x)}$. Cominciamo col calcolare, dove è possibile, il reciproco dei valori della funzione già noti.

$$A' : x_{A'} = x_A = 0; y_{A'} = \frac{1}{y_A} = 1 \rightarrow A'(0; 1)$$

$$B' : x_{B'} = x_B = 1; y_{B'} = \frac{1}{y_B} = \frac{1}{4} \rightarrow B'(1; \frac{1}{4})$$

$$C' : x_{C'} = x_C = 3; y_{C'} = \frac{1}{y_C} = \frac{1}{2} \rightarrow C'(3; \frac{1}{2})$$

$$E' : x_{E'} = x_E = 7; y_{E'} = \frac{1}{y_E} = -\frac{4}{3} \rightarrow E'(7; -\frac{4}{3})$$

$$G' : x_{G'} = x_G = 10; y_{G'} = \frac{1}{y_G} = \frac{1}{4} \rightarrow G'(10; \frac{1}{4})$$

Inoltre, sappiamo che $\frac{1}{f}$ sarà positiva quando f è positiva, negativa quando f è negativa.

Nei punti D e F f assume valore nullo; pertanto $\frac{1}{f}$ presenterà in corrispondenza di $x = 5$ e $x = 8$ asintoti verticali.

Per $x \geq 8$ possiamo scrivere l'espressione analitica di $\frac{1}{f}$:

$$y = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x - 16}.$$

Questa è l'equazione di un'iperbole equilatera di assi $y = 0$ e $x = 8$.

Per avere un'idea più precisa dell'andamento calcoliamo la derivata nei punti in cui abbiamo informazioni sufficienti per farlo. L'espressione generale della derivata è

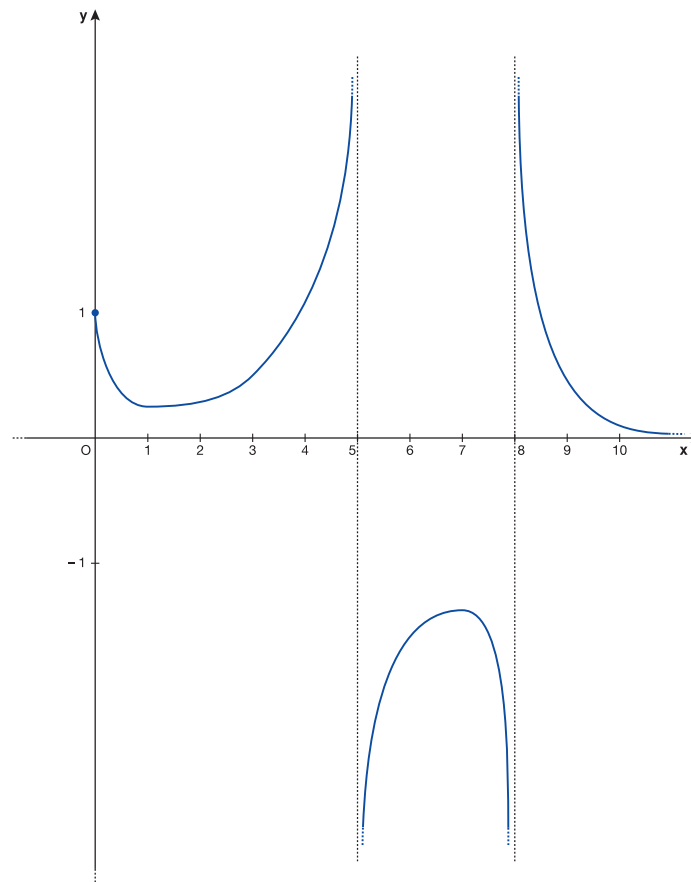
$$y' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

In $x = 3$ otteniamo $y' = -\frac{-2}{4} = \frac{1}{2}$; in $x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = +\infty$, dunque $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{f'(x)}{f(x)^2} = -\infty$. A questo punto, tracciamo il grafico.

L'insieme di definizione è $]0; +\infty[- \{5; 8\}$.

3. Ricordiamo la definizione di media integrale: la media integrale della funzione f sull'intervallo $[x_1; x_2]$ è il rapporto

$$\frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx}{x_2 - x_1}.$$



Per valutare gli integrali ricorriamo alle informazioni relative alle aree fornite dal testo.

Calcoliamo il valor medio di f nell'intervallo $[0; 8]$:

$$\frac{\int_0^8 f(x) dx}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1,25.$$

Calcoliamo il valor medio di $|f|$ nell'intervallo $[0; 8]$:

$$\frac{\int_0^8 |f(x)| dx}{8} = \frac{11 + 1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Calcoliamo il valor medio di f' nell'intervallo $[1; 7]$ ricorrendo al teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\frac{\int_1^7 f'(x) dx}{6} = \frac{[f(x)]_1^7}{6} = \frac{-\frac{3}{4} - 4}{6} = -\frac{19}{24} = -0,791\bar{6}.$$

Per determinare l'ultimo integrale ricordiamo che, nell'intervallo in esame, la funzione F coincide con un arco di parabola di equazione $y = x^2 - 16x + 74$:

$$\frac{\int_9^{10} F(x) dx}{1} = \int_9^{10} (x^2 - 16x + 74) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 8x^2 + 74x \right]_9^{10} = \frac{1000}{3} - 800 + 740 - 243 + 648 - 666 = 12, \bar{3}.$$

4. Essendo F la funzione integrale di f , il coefficiente angolare della tangente a F nel punto di ascissa x è $f(x)$. Infatti per definizione f è la derivata di F .

Deduciamo quindi che la tangente a F in $x = 0$ è una retta di pendenza $1 = f(0)$. Questa retta passa dall'origine perché $F(0) = \int_0^0 f(x)dx = 0$. La retta è dunque $y = x$.

Analogamente la pendenza della tangente in $x = 8$ è 0; poiché $F(8) = 10$, la tangente cercata è la retta orizzontale $y = 10$.