SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2016

1. Le funzioni proposte per ciascuna famiglia sono tutte simmetriche rispetto all'asse y, per ogni intero positivo k.

   Affinché una funzione descriva il profilo laterale del serbatoio, è necessario che:

$$f(0) = 1, \quad f(\pm 1) = 0, \quad f'_+(0) \leq -\tan 10°, \quad f'_-(0) \geq \tan 10°.$$

   Esaminiamo il comportamento delle funzioni di ogni famiglia; per la simmetria, limitiamo il controllo agli x compresi fra 0 e 1.

   Prima funzione

   $f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{k}}$

   $f(0) = 1^{\frac{1}{k}}; \qquad f(1) = 0^{\frac{1}{k}} = 0.$

   $f'_+(x) = -\dfrac{1}{k}(1-x)^{\frac{1}{k}-1}; \qquad f'_+(0) = -\dfrac{1}{k} \cdot 1^{\frac{1}{k}-1} = -\dfrac{1}{k}.$

   $f'_+(0) \leq -\tan 10° \simeq -0,176$ per $-\dfrac{1}{k} \leq -0,176 \to k \leq \dfrac{1}{0,176} \to k \leq 5,68.$

   Poiché k è intero positivo, basta scegliere k fra 1, 2, 3, 4 e 5 affinché la funzione descriva il profilo del serbatoio.

   Seconda funzione

   $f(x) = -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1$

   $f(0) = -6 \cdot 0 + 9k \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 1 = 1;$

   $f(1) = -6 \cdot 1 + 9k \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 1 = 9k - 9 \to f(1) = 0$ per $k = 1$.

   $f'_+(x) = -18x^2 + 18kx - 4,$ che per $k = 1$ diventa $f'_+(x) = -18x^2 + 18x - 4;$

   $f'_+(0) = -4 \leq -\tan 10°.$

 © 2016 Zanichelli editore

Notiamo però che la derivata seconda $f''_+(x) = -36x + 18$ si annulla in $x = \frac{1}{2}$, è positiva prima e negativa dopo. La funzione $f(x)$ volge dunque la concavità verso l'alto in $]0; \frac{1}{2}[$ e verso il basso in $]\frac{1}{2}; 1[$, quindi non può descrivere il profilo del serbatoio.

Terza funzione

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$$

$$f(0) = \cos(0) = 1; \qquad f(1) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

$$f'_+(x) = -\frac{\pi}{2}kx^{k-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x^k\right); \qquad f'_+(0) = 0.$$

Quindi $f'_+(0) > -\tan 10°$ e $f(x)$ non può descrivere il profilo del serbatoio.

In conclusione, il profilo del serbatoio è descritto dalla famiglia di funzioni

$$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{k}}, \text{ per } k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

2. Il volume del serbatoio è dato dall'area della sezione trasversale moltiplicata per la lunghezza del serbatoio stesso:

$$V = S \cdot L = \left(2 \cdot \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{k}} \mathrm{d}x\right) \cdot 8 = 16 \cdot \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{k}} \mathrm{d}x =$$
$$16 \cdot \left[-\frac{(1-x)^{\frac{1}{k}+1}}{\left(\frac{1}{k}+1\right)}\right]_0^1 = 16 \cdot \left[-\frac{(1-x)^{\frac{k+1}{k}}}{\frac{k+1}{k}}\right]_0^1 =$$
$$16 \cdot \frac{1}{\frac{k+1}{k}} = \frac{16k}{k+1}.$$

Imponiamo che il volume sia almeno di 13 m^3:

$$\frac{16k}{k+1} \geq 13 \;\rightarrow\; 16k \geq 13k + 13 \;\rightarrow\; k \geq \frac{13}{3}.$$

 © 2016 Zanichelli editore

Considerando che k è intero e compreso fra 1 e 5 e $\frac{13}{3} \simeq 4,3$, deduciamo che $k = 5$.

Sostituiamo $k = 5$ nell'espressione del volume e otteniamo:

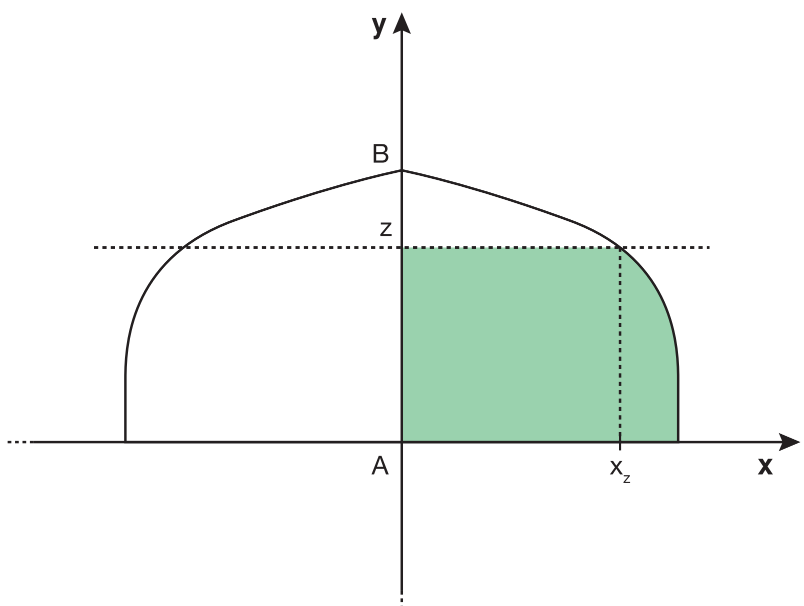
$$\frac{16 \cdot 5}{5+1} = \frac{80}{6} = \frac{40}{3}.$$

Il volume è dunque $\frac{40}{3}$ m^3.

Poiché $\frac{40}{3} \simeq 13,3$, il serbatoio con questo profilo ha volume maggiore dei 13 m^3 richiesti.

3. Fissato il livello z di riempimento del serbatoio, rimane individuata l'ascissa x_z tale che

$$f(x_z) = z \rightarrow (1 - x_z)^{\frac{1}{5}} = z \rightarrow x_z = 1 - z^5.$$



 © 2016 Zanichelli editore

In questo caso, il serbatoio contiene il seguente volume di gasolio (espresso in metri cubi):

$$\begin{aligned}V(z) =& 2\left[z\cdot x_z+\int_{x_z}^{1}(1-x)^{\frac{1}{5}}\,dx\right]\cdot 8 = 16\left[z(1-z^5)+\int_{1-z^5}^{1}(1-x)^{\frac{1}{5}}\,dx\right] = \\ & 16z-16z^6-16\cdot\frac{5}{6}\left[(1-x)^{\frac{6}{5}}\right]_{1-z^5}^{1} = \\ & 16z-16z^6-\frac{40}{3}\left[0-(1-1+z^5)^{\frac{6}{5}}\right] = \\ & 16z-16z^6+\frac{40}{3}z^6 = 16z-\frac{8}{3}z^6.\end{aligned}$$

La percentuale di serbatoio riempito, quando il livello di gasolio è alla quota z, è espressa dal rapporto:

$$P(z)=\frac{V(z)}{V}\cdot 100=\frac{16z-\frac{8}{3}z^6}{\frac{40}{3}}\cdot 100=120z-20z^6.$$

4. In base alla formula precedente quando il livello del serbatoio raggiunge i 50 cm, cioè $0,5$ m, l'indicatore mostra una percentuale di riempimento pari a:

$$120\cdot\frac{1}{2}-20\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=60-\frac{20}{64}\simeq 59,7\to 59,7\%.$$

La percentuale del 50% indicata dall'amministratore è sbagliata perché la sezione trasversale del serbatoio non è un rettangolo, forma che porterebbe ad avere una proporzionalità diretta fra la quota z raggiunta e la percentuale di riempimento del serbatoio. In questo caso, invece, il profilo curvo porta il serbatoio a essere più capiente nella parte bassa rispetto alla parte alta; pertanto, quando il gasolio raggiunge la metà altezza, il serbatoio è riempito per più del 50%.

Secondo l'amministratore, la percentuale di riempimento sarebbe espressa (con z misurato in metri) dal rapporto:

$$P_a(z)=\frac{z}{1}\cdot 100=100z.$$

© 2016 Zanichelli editore

La differenza fra le due percentuali è pari a

$$d(z) = 120z - 20z^6 - 100z = 20z - 20z^6.$$

Osserviamo che $d(0) = d(1) = 0$, a conferma che le due percentuali (0% e 100%) coincidono a serbatoio vuoto e pieno.

Cerchiamo il massimo per la funzione $d(z)$. Calcoliamo la derivata prima:

$$d'(z) = 20 - 120z^5,$$

e studiamo il suo segno:

$$d'(z) = 0 \to 20 - 120z^5 = 0 \to z = \frac{1}{\sqrt[5]{6}} \simeq 0,7;$$
$$d'(z) > 0 \text{ per } 0 < z < \frac{1}{\sqrt[5]{6}} \text{ e } d'(z) < 0 \text{ per } \frac{1}{\sqrt[5]{6}} < z < 1.$$

La funzione differenza $d(z)$ è quindi crescente per $0 < z < \frac{1}{\sqrt[5]{6}}$ e decrescente per $\frac{1}{\sqrt[5]{6}} < z < 1$. L'errore massimo nella valutazione della percentuale si ha in corrispondenza della quota $z = \frac{1}{\sqrt[5]{6}}$ e vale:

$$d\left(\frac{1}{\sqrt[5]{6}}\right) = 20 \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{6}} - 20 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[5]{6}}\right)^6 = \frac{20}{\sqrt[5]{6}}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{50}{3\sqrt[5]{6}} \simeq 11,6 \to 11,6\%.$$

 © 2016 Zanichelli editore