SOLUZIONE DEL QUESITO 9
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2015

Per applicare il teorema di Lagrange

- $f(x)$ deve essere continua su $[0;\, 2]$;
- $f(x)$ deve essere derivabile su $]0;\, 2[$.

Perché f sia continua basta che valga

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x).$$

Poiché

$$\lim_{x\to 1^-} x^3 = 1$$

imponiamo

$$\lim_{x\to 1^+} (x^2 - kx + k) = 1 \to 1 - k + k = 1 \to 1 = 1.$$

La condizione è verificata $\forall k \in \mathbb{R}$.
Cerchiamo ora le condizioni per cui f è derivabile. Calcoliamo

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 2x - k & \text{se } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} 3x^2 = 3;$$

$$\lim_{x\to 1^+} 2x - k = 2 - k.$$

Imponendo

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$$

otteniamo

$$3 = 2 - k \to k = -1.$$

Per $k = -1$ la funzione $f(x)$ soddisfa quindi le condizioni del teorema di Lagrange sull'intervallo $[0;\, 2]$; possiamo dire che $\exists c \in]0; 2[$ tale che

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c).$$

Per $k = -1$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ x^2 + x - 1 & \text{se } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

quindi

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{4+2-1}{2}=\frac{5}{2};$$

per $k=-1$ la derivata $f'(x)$ invece ha equazione

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & \text{se } 0\leq x\leq 1 \\ 2x+1 & \text{se } 1<x\leq 2 \end{cases}$$

Cerchiamo $c\in]1;2[$ tale che $f'(c)=\frac{5}{2}$:

$$f'(c)=2c+1\rightarrow 2c+1=\frac{5}{2}\rightarrow 2c=\frac{3}{2}\rightarrow c=\frac{3}{4}$$

ma $\frac{3}{4}\notin]1;2[$.
Cerchiamo quindi $c\in]0;1[$ tale che $f'(c)=\frac{5}{2}$:

$$f'(c)=3c^2\rightarrow 3c^2=\frac{5}{2}\rightarrow c^2=\frac{5}{6}\rightarrow c=\pm\sqrt{\frac{5}{6}}$$

ma $-\sqrt{\frac{5}{6}}\notin]0;1[$, quindi il punto cercato è $c=\sqrt{\frac{5}{6}}$.

