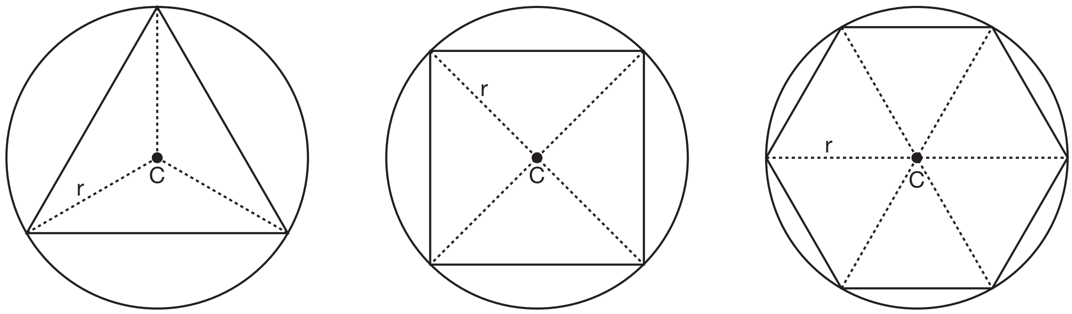
SOLUZIONE DEL QUESITO 7
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2015

Ogni poligono regolare di n lati, inscritto in una circonferenza di raggio r, è composto da n triangoli isosceli congruenti tra loro che hanno:

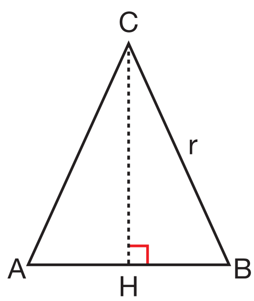
- la base congruente al lato del poligono regolare;
- il lato obliquo congruente al raggio r della circonferenza;
- l'angolo al vertice che misura $\frac{2\pi}{n}$.



Quindi, indicata con $A(n)$ l'area del poligono:

$$A(n) = A_T \cdot n,$$

dove A_T è l'area di ognuno degli n triangoli congruenti T.
Consideriamo allora un triangolo T:



La sua area è:

$$A_T = \frac{AB \cdot CH}{2}.$$

Sappiamo che $A\hat{C}B = \frac{2\pi}{n}$ e $H\hat{C}B \cong A\hat{C}H$; infatti CH è altezza, e quindi (poiché ABC è isoscele) anche bisettrice e mediana. Allora:

$$H\hat{C}B = A\hat{C}H = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}.$$

Scriviamo le lunghezze di base e altezza del triangolo T in funzione dell'angolo $H\hat{C}B$.

La lunghezza di CH, cateto del triangolo rettangolo CBH, è:

$$CH = CB \cdot \cos(H\hat{C}B) = r \cdot \cos\frac{\pi}{n}.$$

La lunghezza di HB è invece:

$$HB = CB \cdot \operatorname{sen}(H\hat{C}B) = r \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}.$$

Poiché $HB = \frac{1}{2}AB$:

$$AB = 2r \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}.$$

Dunque l'area del triangolo T è:

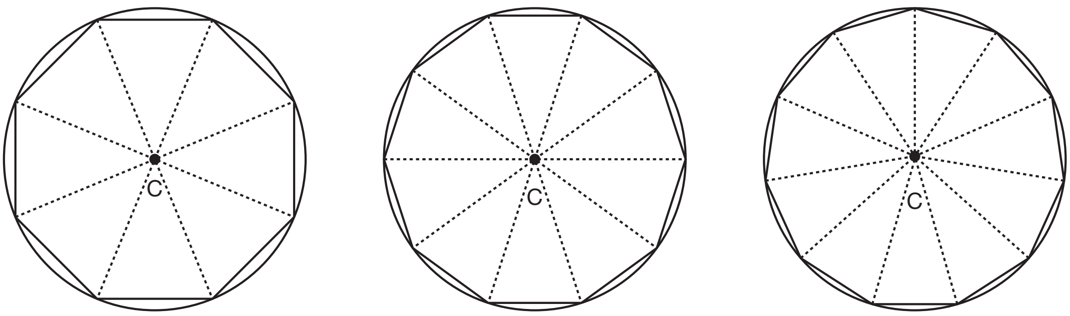
$$A_T = \frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2r^2 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{n} \cdot \cos\frac{\pi}{n} = \frac{r^2}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}.$$

Pertanto, l'area del poligono regolare di n lati risulta:

$$A(n) = \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}.$$

Calcoliamo il limite di $A(n)$ per $n \to +\infty$.

Osserviamo che, all'aumentare del numero dei lati, il poligono regolare tende alla circonferenza in cui è inscritto.



È ragionevole aspettarci che il limite per $n \to +\infty$ dell'area $A(n)$ sia l'area del cerchio, cioè πr^2.

Svolgiamo il limite.

$$\lim_{n\to+\infty} A(n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} = r^2 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}.$$

Osserviamo che se $n \to +\infty$, allora:

$$\frac{2\pi}{n} \to 0.$$

Quindi possiamo applicare il limite notevole:

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1.$$

Moltiplicando e dividendo per π, otteniamo:

$$r^2 \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2\pi} \cdot \pi \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} = \pi r^2 \cdot \lim_{\frac{2\pi}{n} \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi r^2 \cdot 1 = \pi r^2,$$

che è il risultato che ci aspettavamo.