SOLUZIONE DEL QUESITO 6
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2015

Primo metodo

Il minimo di una funzione continua e derivabile nel suo dominio, se esiste, si verifica in corrispondenza di un punto stazionario o in uno degli estremi del dominio.
Il dominio di $f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2$ è $\mathbb{R}$, quindi se f assume il valore minimo lo fa in un punto stazionario.
Calcoliamo la derivata di f:

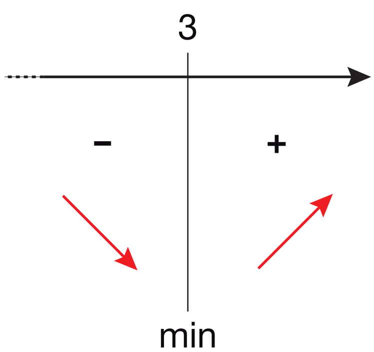
$$f'(x) = 2[(x-1)+(x-2)+(x-3)+(x-4)+(x-5)] = 2(5x-15) = 10(x-3).$$

Cerchiamo il valore di x che annulla la derivata:

$$f'(x) = 10(x-3) = 0 \rightarrow x-3 = 0 \rightarrow x = 3.$$

L'unico punto stazionario di f è quindi $x = 3$ e si ha:

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \quad \text{se} \quad x < 3 \\ f'(x) &> 0 \quad \text{se} \quad x > 3. \end{aligned}$$



Una funzione è decrescente quando la sua derivata è negativa e crescente quando la sua derivata è positiva; dunque f è decrescente per $x < 3$ e crescente per $x > 3$.
Ne possiamo dedurre che $x = 3$ è un punto di minimo assoluto per f, e il minimo vale:

$$f(3) = 2^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-2)^2 = 4 + 1 + 1 + 4 = 10.$$

Secondo metodo

Notiamo che la funzione è una parabola e si può scrivere nella forma

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Il valore di a è 5, quindi la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto. Questo ci garantisce che esiste il minimo.
Trasliamo ora la parabola di un vettore $(-3; 0)$ e definiamo X, Y in questo modo

$$X = x - 3 \text{ e } Y = y,$$

da cui

$$x = X + 3.$$

La funzione traslata si scrive

$$Y = (X + 2)^2 + (X + 1)^2 + X^2 + (X - 1)^2 + (X - 2)^2.$$

Si vede che la funzione è pari ed è una parabola (presenta solo termini di grado 0, 1 e 2 in x), quindi il suo vertice (che è il punto in cui la funzione assume il valore minimo) sta sull'asse Y, cioè sulla retta $X = 0$. Tornando alle coordinate di partenza, il vertice deve quindi appartenere alla retta $x = 3$. Per trovare il valore minimo basta ora calcolare

$$f(3) = (3 - 1)^2 + (3 - 2)^2 + (3 - 3)^2 + (3 - 4)^2 + (3 - 5)^2 = 10.$$

