SOLUZIONE DEL QUESITO 5
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2015

Primo metodo risolutivo

Nello spazio tridimensionale, un piano passante per l'origine è espresso dall'equazione:

$$ax + by + cz = 0.$$

Con $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$, otteniamo il piano dato $\sigma : x + y - z = 0$.
L'equazione $a'x+b'y+c'z = 0$ rappresenta un piano σ' passante per l'origine e perpendicolare a σ se valgono le seguenti condizioni:

- a', b', c' sono non tutti nulli;
- $aa' + bb' + cc' = 0 \to a' + b' - c' = 0 \to c' = a' + b'$.

Otteniamo così un fascio di piani passanti per l'origine e perpendicolari a quello dato:

$$a'x + b'y + (a' + b')z = 0,$$

con a', b' non entrambi nulli.
La retta r perpendicolare a σ si ottiene intersecando due piani qualsiasi appartenenti al fascio, come per esempio $x + y + 2z = 0$ (che si ottiene per $a' = 1$, $b' = 1$, $c' = 2$) e $x + z = 0$ (che si ottiene per $a' = 1$, $b' = 0$, $c' = 1$).
Pertanto la retta cercata ha espressione analitica:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Secondo metodo risolutivo

Dato un piano $ax + by + cz + d = 0$, sappiamo che il vettore $\vec{v}(a; b; c)$ è perpendicolare al piano. Nel nostro caso, il vettore $\vec{v}(1; 1; -1)$ è perpendicolare al piano σ di equazione $x + y - z = 0$. La retta perpendicolare al piano σ e passante per O deve contenere il punto $P(1; 1; -1)$. Scriviamo l'equazione della retta passante per i punti O e P:

$$\frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{y - 0}{1 - 0} = \frac{z - 0}{-1 - 0} \to x = y = -z \to \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0. \end{cases}$$

