

SOLUZIONE DEL QUESITO 4
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2015

Calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda della funzione $y = \frac{\ln x}{x}$:

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{-\ln x + 1}{x^2};$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (-\ln x + 1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x + 2x \ln x - 2x}{x^4} = \\ &= \frac{2x \ln x - 3x}{x^4} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}. \end{aligned}$$

Sostituiamo nelle varie equazioni per verificare se y è soluzione.

1. Sostituiamo in $y'' + 2 \cdot \frac{y'}{x} = y$.

$$\begin{aligned} \frac{2 \ln x - 3}{x^3} + 2 \frac{-\ln x + 1}{x^3} &= \frac{2 \ln x - 3 - 2 \ln x + 2}{x^3} = \\ &= -\frac{1}{x^3} \neq \frac{\ln x}{x} \end{aligned}$$

2. Sostituiamo in $y' + x \cdot y'' = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{-\ln x + 1}{x^2} + x \cdot \frac{2 \ln x - 3}{x^3} &= \frac{-\ln x + 1 + 2 \ln x - 3}{x^2} = \\ &= \frac{\ln x - 2}{x^2} \neq 1 \end{aligned}$$

3. Sostituiamo in $x \cdot y' = \frac{1}{x} + y$.

$$x \cdot \frac{-\ln x + 1}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \neq \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

4. Sostituiamo in $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + \frac{2}{x} = y$.

$$x^2 \cdot \frac{2 \ln x - 3}{x^3} + x \cdot \frac{-\ln x + 1}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{2 \ln x - 3 - \ln x + 1 + 2}{x} = \frac{\ln x}{x}$$

Dunque la funzione è soluzione della quarta equazione.