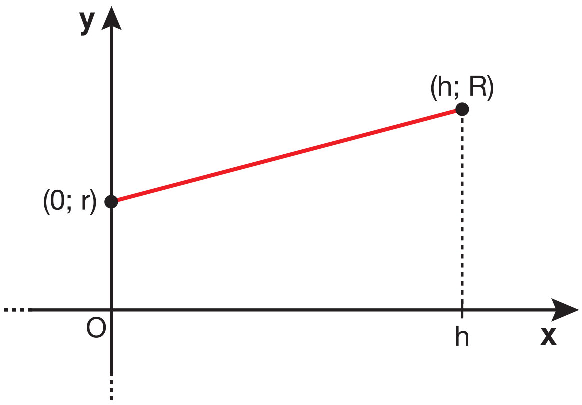
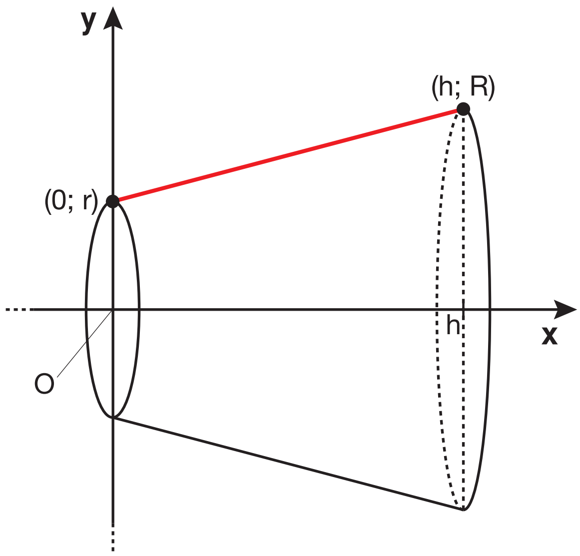
SOLUZIONE DEL QUESITO 2
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2015

Per trovare il volume del tronco di cono basta calcolare il volume del solido che si ottiene ruotando attorno all'asse x il trapezio delimitato dall'asse x e dalle rette $x = 0$ e $x = h$.





Calcoliamo l'equazione della retta passante per $(0; r)$ e $(h; R)$:

$$\frac{y - r}{R - r} = \frac{x}{h}$$

da cui

$$y = \frac{R - r}{h}x + r.$$

Per trovare il volume è ora sufficiente applicare la formula per il calcolo del volume di un solido di rotazione alla funzione

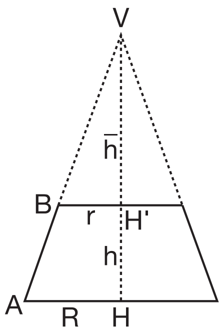
$$f(x) = \frac{R - r}{h}x + r$$

 © 2015 Zanichelli editore

nell'intervallo $[0; h]$:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h \left(\frac{R-r}{h}x + r\right)^2 \, dx = \pi \int_0^h \left[\frac{(R-r)^2}{h^2}x^2 + 2\frac{r(R-r)}{h}x + r^2\right] \, dx \\ &= \pi \left[\frac{(R-r)^2}{3h^2}x^3 + \frac{r(R-r)}{h}x^2 + r^2 x\right]_0^h \\ &= \pi \left[\frac{(R-r)^2}{3}h + r(R-r)h + r^2 h\right] \\ &= \pi h \left(\frac{R^2 - 2R\cdot r + r^2 + 3R\cdot r - 3r^2 + 3r^2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R\cdot r). \end{aligned}$$

Possiamo rispondere alla domanda anche ragionando da un punto di vista geometrico. Pensiamo al nostro solido come a un cono a cui è stato tolto un pezzo (sempre un cono) in alto.



I triangoli AHV e $BH'V$ sono simili perché sono rettangoli e hanno un angolo in comune. Quindi si ha

$$R : (h + \bar{h}) = r : \bar{h},$$

da cui si ricava

$$\bar{h} = h\frac{r}{R-r}.$$

Il volume del tronco di cono si può ottenere sottraendo dal volume del cono grande il volume del cono piccolo. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi R^2(h+\bar{h})}{3} - \frac{\pi r^2 \bar{h}}{3} = \\ &= \frac{\pi}{3}\left[hR^2 + \frac{rh}{R-r}R^2 - \frac{rh}{R-r}r^2\right] = \\ &= \frac{\pi}{3}\left[hR^2 + \frac{rh}{R-r}(R^2 - r^2)\right] = \end{aligned}$$

 © 2015 Zanichelli editore

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{3}\left[hR^2 + rh(R+r)\right] = \\
&= \frac{\pi}{3}h\left(R^2 + r^2 + R\cdot r\right).
\end{aligned}
$$

© 2015 Zanichelli editore