SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2015

Osservazioni sul punto 1 del problema 2

Un problema non banale, formulato in modo poco chiaro

Il primo punto del problema 2 chiede di dire quale *potrebbe essere* il grado minimo di un eventuale polinomio con le caratteristiche elencate nel testo e illustrate in figura.

L'enunciato di questo punto fa uso del verbo "potrebbe" (e non del verbo "dovrebbe", come si aspetterebbe un matematico). In un certo senso è un enunciato "elastico" o "aperto": invita a *formulare un'ipotesi* (sul grado di un eventuale polinomio) e di *giustificarla*.

È quindi un problema che si presta a differenti livelli di risoluzione, più o meno approfondita a seconda delle competenze e abilità di chi tenta di risolverlo, e del numero di informazioni che si utilizzano nella risoluzione.

La soluzione proposta da Zanichelli nel giorno della seconda prova è quella che dovrebbe soddisfare chi si propone di valutare l'apprendimento matematico liceale: sulla base dell'analisi del grafico proposto si conclude che, "nel caso che $f(x)$ fosse esprimibile con un polinonio, il suo grado minimo potrebbe essere 4".

Certamente è una soluzione incompleta, perché non si è tenuto conto di *tutte* le informazioni del testo.

Se infatti si tenesse conto di tutte le informazioni del testo, il problema risulterebbe di una difficoltà di gran lunga superiore a quella affrontabile da un alunno di quinta liceo.

Testo e figura

Osserviamo prima di tutto che l'informazione data nel testo sulle aree è incompatibile con quelle che emergono dalla figura.

In quest'ultima le aree di A, B, C e D sono pressoché uguali, mentre nel testo sono, rispettivamente, uguali a 2, 3, 3 e 1. (La discrepanza è particolarmente visibile confrontando A e D, che nella figura sono di poco distinguibili da triangoli con base 1 e uguale altezza.)

Inoltre, se gli assi fossero monometrici, come è sempre assunto salvo avviso contrario, l'area di B, e quella di C nella figura sarebbero minori di 2, perché contenute ciascuna in un rettangolo di base 2 altezza minore di 1. Nel testo è scritto che le loro aree sono uguali a 3.

Se non vogliamo fermarci qui (e scoraggiarci per queste contraddizioni) tuttavia, conviene ricordare il noto detto secondo cui la geometria è "l'arte di fare i ragionamenti giusti sulle figure sbagliate", estendere la sua validità all'analisi, e trarre dal grafico solamente le informazioni che non siano contraddittorie con quelle fornite dal testo.

Esplicitiamo allora le informazioni che possiamo trarre dal grafico, e che siano *evidenti* e *non contraddittorie* con il testo:

1. la funzione $f(x)$ si annulla per $x = -2$, $x = 0$ e $x = 2$.
   Inoltre, non si annulla per altri valori nell'intervallo $[-3, 3]$.

2. la funzione $f(x)$ non ha altri punti stazionari nell'intervallo $[-3, 3]$, cioè il suo grafico Γ non ha altri punti con tangenti orizzontali con ascissa nell'intervallo $[-3, 3]$ se non quelli di ascissa -1, 1 e 2.

Invece, *non* possiamo concludere che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ (perché il grafico potrebbe avere altre drammatiche variazioni – e altri punti di flesso – al di fuori dell'intervallo $[-3, 3]$).

Quindi il grado del polinomio non è necessariamente pari.

Un altro possibile piano d'attacco

Un modo standard di trovare un polinomio con date caratteristiche, è quello di considerare i suoi coefficienti come incognite, e tradurre ognuna delle condizioni date in un'equazione nelle incognite scelte.

Si ottiene così un sistema lineare con tante equazioni quante le condizioni, e tante incognite quanti i coefficienti.

Se il grado del polinomio fosse noto, le equazioni darebbero luogo a un sistema lineare: esso può essere determinato, indeterminato o impossibile. A seconda di quale di queste tre possibilità sia realizzata, possiamo concludere che esiste rispettivamente un unico polinomio, o infiniti polinomi, o nessun polinomio che soddisfa le condizioni date.

Il problema della prova è però più complicato, perché *non si conosce* il grado n del polinomio, quindi non si sa nemmeno quanti coefficienti abbia. Il polinomio $f(x)$ ha (al più) $n + 1$ termini, di cui possiamo scrivere i primi e gli ultimi:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

con $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, e $a_n \neq 0$.

Il primo punto del problema si può riformulare nel modo seguente:

> qual è il valore più piccolo di n, perché esista un polinomio di grado n che soddisfa le condizioni date?

Le condizioni sono:

1. Tre condizioni sul valore di $f(x)$:
   $f(-2) = 0$, $f(0) = 0$ e $f(2) = 0$;

2. tre condizioni sul valore della derivata prima di $f(x)$:
   $f'(-1) = 0$, $f'(1) = 0$ e $f'(2) = 0$;

3. quattro condizioni sulle aree, che corrispondono a valori dell'integrale di $f(x)$:

$$\int_{-3}^{-2} f(x)dx = -2, \quad \int_{-2}^{0} f(x)dx = 3,$$
$$\int_{0}^{2} f(x)dx = -3, \quad \int_{2}^{3} f(x)dx = -1$$

Ci sono quindi 3+3+4 = 10 condizioni sul polinomio, ovvero sui suoi coefficienti.

Se ammettiamo che le condizioni siano *indipendenti*, il numero di incognite *minimo* perché il sistema abbia una soluzione deve essere pari al numero delle equazioni, cioè 10.

Poiché il grado di $f(x)$ è uno in meno rispetto al numero dei suoi coefficienti, potremmo concludere che, se le condizioni sono indipendenti, $f(x)$ è **almeno di grado 9**.

Questa è la risposta che darebbe un allievo (o allieva) brillante di quinta liceo, che ha a sua disposizione solo il suo cervello e una calcolatrice non programmabile.

Bene! Era meno banale di quanto sembrasse, ma ora abbiamo finito. O no?

Non proprio. Se volessimo essere meticolosi, dovremmo affrontare due ulteriori questioni:

(a) Se scegliamo $n = 9$ e impostiamo il sistema delle 10 equazioni, esse risultano indipendenti?

(b) Siamo sicuri che il polinomio trovato (unico!) di grado 9 si annulli *solo* nei punti assegnati, e che abbia *solo* i punti stazionari assegnati, compresi nell'intervallo [-3,3]?

Molto probabilmente (a) è vera, mentre (b) è falsa.

Ma l'unico modo per accertarsi di (a) è scrivere il sistema e calcolarne in qualche modo il rango: per esempio con il metodo di riduzione di Gauss, che tuttavia non rientra nella normale pratica didattica del liceo scientifico, né nelle indicazioni ministeriali.

Tali calcoli si possono svolgere a mano, ma è un compito estremamente lungo, con calcoli molto impegnativi.

Per dare un'idea di tali equazioni, scriviamo quelle corrispondenti alle prime *tre* condizioni ($f(0) = 0, f(-2) = 0, f(2) = 0$):

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 + 16a_4 - 32a_5 + 64a_6 - 128a_7 + 256a_8 - 512a_9 = 0 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 + 32a_5 + 64a_6 + 128a_7 + 256a_8 + 512a_9 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Sicuramente impensabile farlo nel corso della seconda prova dell'Esame di Stato, senza avere a disposizione qualche software di calcolo simbolico.

Ma ammettiamo pure che (a) sia vero: non è detto che lo sia (b). Infatti un polinomio di grado 9 può annullarsi per altri 5 valori di x (oltre a -2, 0 e 2), e nulla vieta che tali valori siano compresi nell'intervallo [-3,3].

Trovare delle condizioni sui coefficienti per cui un polinomio *non* si annulli in un certo intervallo non è così semplice come per i tre tipi di condizioni visti sopra.

Anche qui, una possibilità sarebbe usare un software di calcolo per tracciare il grafico del polinomio di nono grado trovato e vedere se interseca l'asse delle x in altri punti nell'intervallo [-3,3]. Un'indagine di questo tipo conferma l'esistenza di un polinomio di grado nove che soddisfa le 10 condizioni elencate, ma non le limitazioni sugli zeri di $f(x)$ (e sui suoi punti stazionari), e quindi ci fa concludere che un polinomio con le condizioni date deve avere grado *maggiore* di nove. Cioè, almeno dieci.

Ma dai ragionamenti svolti finora, non si può affatto concludere che *esista* un polinomio con le condizioni date e un grafico simile a quello tracciato; anzi, viene il sospetto che tale polinomio possa *non* esistere...

