SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2015

1. La funzione $f(x)$ è polinomiale di grado almeno 4. Questo può essere dedotto in almeno tre modi diversi:

a) Punti d'intersezione con l'asse x. Dalla figura osserviamo che i punti di intersezione del grafico Γ con l'asse delle x sono 3, con ascisse $-2, 0, 2$. Queste corrispondono alle radici dell'equazione $f(x) = 0$:

- $x = -2$ e $x = 0$ sono soluzioni di molteplicità 1;
- $x = 2$ è di molteplicità pari (almeno 2).

Per il teorema di Ruffini, se un polinomio ammette come radice un numero reale a, allora è divisibile per il polinomio $(x - a)$. Applicandolo a $f(x)$, per ciascuna delle sue radici, e tenendo conto delle loro molteplicità, otteniamo:

$$f(x) = p(x)(x + 2)(x - 0)(x - 2)^{2m},$$

dove $p(x)$ è un polinomio non nullo (eventualmente costante) e m è un intero positivo. Ricordando che il grado di un polinomio (indicato con deg) espresso come prodotto di polinomi è la somma dei gradi dei suoi fattori, concludiamo:

$$\deg f(x) = \deg p(x) + 1 + 1 + 2m \geq 4.$$

b) Punti stazionari. Poiché Γ presenta 3 tangenti orizzontali in corrispondenza di $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$, la funzione $f(x)$ ammette 3 punti stazionari. Questi corrispondono alle radici dell'equazione $f'(x) = 0$. Analogamente a quanto detto al punto **a)**, per il teorema di Ruffini, possiamo scrivere:

$$f'(x) = q(x)(x + 1)(x - 1)(x + 2),$$

dove $q(x)$ è un polinomio non nullo (eventualmente costante). Dal momento che $\deg f(x) = \deg f'(x) + 1$ e $\deg f'(x) = \deg q(x) + 1 + 1 + 1 \geq 3$, possiamo concludere che $\deg f(x) \geq 4$.

c) Punti di flesso. Il grafico Γ cambia concavità almeno due volte: in $x = -1$ è rivolta verso il basso, in $x = 1$ è rivolta verso l'alto, in $x = 2$ è nuovamente rivolta verso il basso. Di conseguenza ci sono almeno due punti di flesso, uno nell'intervallo $]-1; 1[$ e uno nell'intervallo $]1; 2[$. Essendo $f(x)$ polinomiale, e quindi derivabile due volte, la sua derivata seconda si annulla per due valori distinti di x. Per il teorema di Ruffini, $f''(x)$ è un polinomio di grado almeno 2. Quindi, poiché $\deg f(x) = \deg f''(x) + 2$ e $\deg f''(x) \geq 2$, possiamo concludere che: $\deg f(x) \geq 4$.

2. I punti stazionari della funzione $g(x)$ corrispondono ai punti in cui si annulla la sua derivata:

$$g'(x) = f(x) = 0,$$

cioè $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$. In particolare, un punto stazionario x è di massimo relativo per g se

$$g''(x) = f'(x) < 0$$

e ricordiamo che $f'(x)$ è negativa negli intervalli reali in cui $f(x)$ è decrescente. Quindi possiamo già concludere che $x = 0$ è un punto di massimo relativo per $g(x)$, poiché $f(0) = 0$ e $f'(0) < 0$.
D'altra parte, osserviamo che:

- $f(-2) = 0$ ma $f'(-2) > 0$. Quindi $x = -2$ è un punto di minimo relativo per $g(x)$;
- $f(2) = 0$ ma $f'(2) = 0$ e $g'(x) = f(x) < 0$ per ogni x in un intorno opportuno di 2. Quindi $g(x)$ è decrescente in tale intorno e $x = 2$ è un punto di flesso orizzontale.

La funzione $g(x)$ volge la concavità verso l'alto negli intervalli in cui la sua derivata seconda è positiva. Dato che $g''(x) = f'(x)$, e $f'(x) > 0$ negli intervalli in cui $f(x)$ è crescente, basta guardare in figura per capire che ciò accade in $]-3, -1[$ e in $]1, 2[$.

3. Sapendo che $g(x)$ è una primitiva di $f(x)$ e che $g(3) = -5$, possiamo applicare il teorema di Torricelli-Barrow a $f(x)$ sull'intervallo $[0, 3]$:

$$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = g(3) - g(0),$$

da cui

$$g(0) = -5 - \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x.$$

Ricordiamo che l'integrale definito di una funzione negativa è pari all'area, cambiata di segno, compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle x. Di conseguenza:

$$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = -C - D = -4.$$

Concludiamo che:

$$g(0) = -5 - (-4) = -1.$$

Ora consideriamo il limite $L = \lim_{x\to 0} \frac{1 + g(x)}{2x}$.

Sostituendo il valore $x = 0$, il numeratore diventa $1 + g(0) = 1 + (-1) = 0$ e il denominatore $2 \cdot 0 = 0$. Il limite L è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Possiamo calcolarlo applicando il teorema di De L'Hospital. Infatti, numeratore e denominatore sono funzioni continue e derivabili, con il denominatore non nullo per $x \neq 0$. Il limite L, se esiste, è uguale al limite del rapporto delle derivate di numeratore e denominatore:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + g(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{2}.$$

Osserviamo che il limite L esiste perché $f(x)$ è continua in $x = 0$ e ivi si annulla. Concludiamo quindi che $\lim_{x\to 0} \frac{1 + g(x)}{2x} = \frac{f(0)}{2} = 0$.

4. Per calcolare l'integrale

$$\int_{-2}^1 h(x)\mathrm{d}x \quad = \quad 3 \cdot \int_{-2}^1 f(2x+1)\mathrm{d}x,$$

effettuiamo il seguente cambiamento di variabili:

$$2x + 1 = t \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t,$$

da cui gli estremi $x = -2$ e $x = 1$ vengono, rispettivamente, trasformati in $t = -3$ e $t = 3$. L'integrale diventa allora:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^1 h(x)\mathrm{d}x &= \frac{3}{2}\int_{-3}^3 f(t)\mathrm{d}t = \\
&= \frac{3}{2}\left(\int_{-3}^{-2} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-2}^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t + \int_2^3 f(t)\mathrm{d}t\right) = \\
&= \frac{3}{2}(-A + B - C - D) = \frac{3}{2}(-2 + 3 - 3 - 1) = \frac{3}{2}(-3) = -\frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

