SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2015

1. Indicando con x i minuti di conversazione effettuati nel mese considerato, la spesa totale mensile in euro è espressa dalla funzione

$$f(x) = 10 + \frac{x}{10}.$$

La variabile x può assumere valori tra un minimo di 0 minuti e un massimo del numero di minuti di un mese commerciale di 30 giorni, cioè 43 200 minuti.

La funzione f rappresenta un modello lineare crescente, nel quale l'intercetta 10 indica il costo fisso iniziale e la pendenza $\frac{1}{10}$ indica il costo al minuto.

Il costo medio al minuto è espresso dal seguente rapporto:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

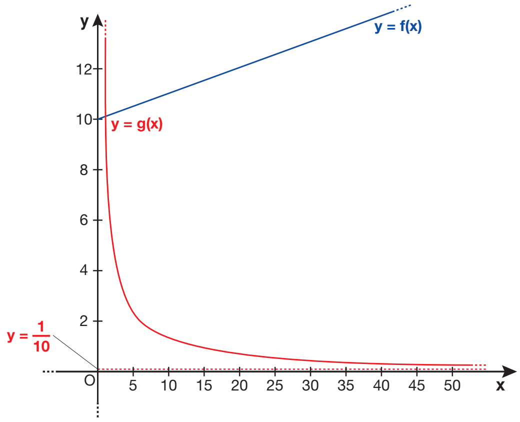
ovvero

$$g(x) = \frac{x+100}{10x}.$$

Il dominio della funzione g è uguale a quello della funzione f privato dello 0.

Il grafico della funzione omografica g, nel suo dominio naturale, è un'iperbole con l'asse y come asintoto verticale e la retta $y = \frac{1}{10}$ come asintoto orizzontale.

Rappresentiamo il grafico delle funzioni considerate.



Per $x > 0$, la funzione g tende decrescendo al valore $\frac{1}{10}$ senza assumere mai tale valore. Quindi nel dominio $]0; +\infty[$ la funzione g non ha estremanti relativi.

Se tuttavia consideriamo il dominio $]0; 43\,200]$ imposto dalla situazione concreta che si riferisce a un periodo mensile, la funzione g ammette un minimo assoluto (e quindi anche relativo) nell'estremo destro del suo dominio.

Ad ogni modo dal punto di vista dell'analisi dei consumi, l'errore che si commette a lavorare nel dominio $]0; +\infty[$ anziché nel dominio $]0; 43\,200]$ è trascurabile, quindi nel seguito considereremo semplicemente $x > 0$.

La decrescenza della funzione g sottolinea come il costo medio al minuto diminuisca all'aumentare dei minuti di conversazione effettuati.

2. Se x_0 rappresenta il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, e quindi $g(x_0)$ il relativo costo medio per minuto, allora il valore x_1 richiesto indica il numero di minuti di conversazione che dimezzano il costo medio $g(x_0)$. Di conseguenza dovrà necessariamente essere $x_1 > x_0$.

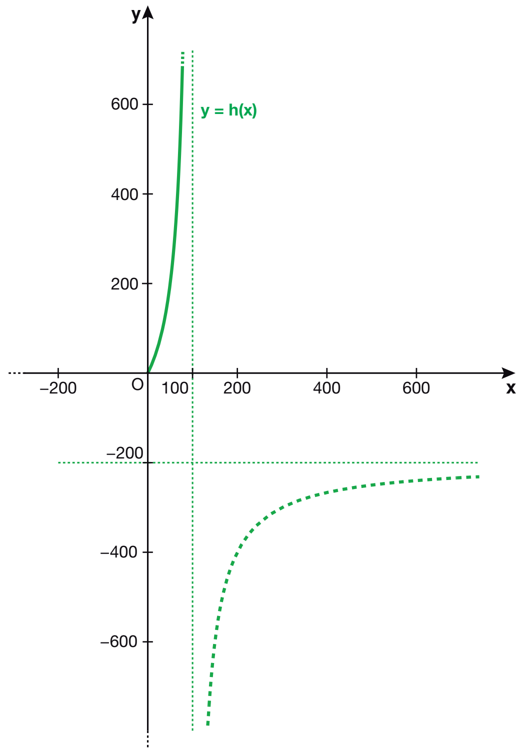
   Determiniamo x_1 in funzione di x_0.

$$\begin{aligned} g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x_1 + 100}{10x_1} = \frac{x_0 + 100}{20x_0} \\ &\Leftrightarrow \quad 2x_0(x_1 + 100) = x_1(x_0 + 100) \\ &\Leftrightarrow \quad x_1(x_0 + 100) - 2x_0x_1 = 200x_0 \\ &\Leftrightarrow \quad x_1(x_0 + 100 - 2x_0) = 200x_0 \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{200x_0}{100 - x_0} \end{aligned}$$

   La funzione che esprime la dipendenza di x_1 da x_0 ha dunque espressione:

$$h(x) = \frac{200x}{100 - x}.$$

   Nel dominio naturale il grafico di tale funzione omografica è un'iperbole di asintoti $x = 100$ e $y = -200$. Riferita al contesto reale ne rappresentiamo il grafico solo per $x > 0$.



Poiché sia le ascisse sia le ordinate rappresentano minuti di conversazione, solamente il ramo positivo ha un significato reale.

Il valore 100, che individua l'asintoto verticale, è esattamente il numero di minuti di conversazione che hanno come costo medio $g(100) = \frac{1}{5} =\ 0,2$, esattamente il doppio di $\frac{1}{10}$, costo medio asintotico. Raggiunti o superati i 100 minuti di conversazione, il costo medio non è quindi più dimezzabile. Dunque il dominio che modellizza la situazione reale è $]0; 100[$. D'altra parte più ci avviciniamo ai 100 minuti di conversazione, più il tempo x_1 necessario a dimezzare il costo al minuto tende a diventare infinitamente elevato, da cui l'andamento asintotico della funzione considerata.

3. Cerchiamo una funzione del tipo

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

il cui grafico passa per i punti $A(0; 2)$, $B(2; \frac{7}{2})$ e $C(4; 4)$.

Risolviamo il sistema ottenuto sostituendo all'equazione della funzione le coordinate dei punti noti.

$$\begin{cases} 2 = c \\ \frac{7}{2} = 4a + 2b + c \\ 4 = 16a + 4b + c \end{cases}$$

la cui soluzione è la terna

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

La funzione che descrive il margine superiore della zona considerata è dunque

$$p(x) = -\frac{1}{8}x^2 + x + 2$$

con $x \in [0; 6]$.

Osserviamo che la funzione descrive un arco di parabola il cui vertice è proprio il punto C, in accordo con quanto suggerisce la figura.

L'area della zona considerata, ovvero l'area sottesa dalla funzione p nell'intervallo $[0; 6]$, vale:

$$A_{\text{totale}} = \int_0^6 \left(-\frac{1}{8}x^2 + x + 2\right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{8} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^6 = 21\,\mathrm{km}^2$$

La regione Z priva di copertura ha area 0,5 km^2, pertanto la regione effettivamente coperta dal segnale ha area A_{coperta} =20,5 km^2.

Osserviamo che:

$$\frac{A_{\text{coperta}}}{A_{\text{totale}}} = \frac{20,5}{21} \simeq 0,976 = 97,6\%$$

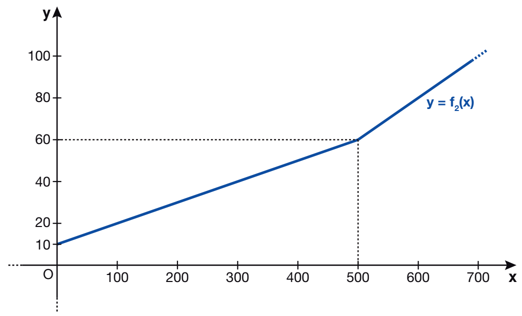
Tale rapporto è quindi superiore alla copertura dichiarata dal gestore (96%). L'affermazione sul sito web sottostima l'effettiva copertura, ma la differenza è a vantaggio del consumatore.

4. Dopo la modifica del piano tariffario le funzioni diventano definite per casi, in particolare l'espressione della spesa totale dopo x minuti di conversazione diventa una funzione lineare crescente a tratti di equazione:

$$f_2(x) = \begin{cases} 10 + \dfrac{x}{10} & \text{se } 0 \leq x \leq 500 \\ 10 + \dfrac{x}{10} + \dfrac{x - 500}{10} = \dfrac{x - 200}{5} & \text{se } x > 500 \end{cases}$$

La nuova funzione è continua in tutto il suo dominio, anche in $x = 500$, dove limite destro e sinistro coincidono col valore $f_2(500) = 60$.

Non è invece derivabile in tale punto in quanto la derivata sinistra è $\frac{1}{10}$, mentre la derivata destra vale $\frac{1}{5}$. La funzione f_2 è quindi derivabile in ogni punto del dominio tranne in $x = 500$ dove è presente un punto angoloso.

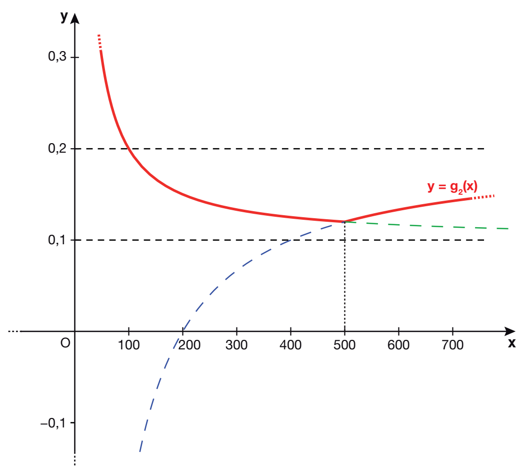


Il costo medio al minuto aggiornato alla nuova tariffa diventa:

$$g_2(x) = \frac{f_2(x)}{x} = \begin{cases} \dfrac{x+100}{10x} & \text{se } 0 < x \leq 500 \\ \dfrac{x-200}{5x} & \text{se } x > 500 \end{cases}$$

Questa funzione è continua in ogni punto del dominio: anche in $x = 500$, dove vale $g_2(500) = \frac{3}{25} = 0,12$.

Il grafico di tale funzione è rappresentato da due rami di iperbole.



Rispetto alla situazione precedente, g_2 presenta ora un nuovo asintoto orizzontale destro di equazione $y = \frac{1}{5}$, è decrescente tra 0 e 500 e crescente per $x > 500$, con un minimo assoluto in $x = 500$ che è un punto angoloso. La funzione non ha invece massimo assoluto né relativo.

Per quanto riguarda la derivata prima di g_2, osserviamo che essendo $x = 500$ un punto angoloso di g_2 ne segue che la sua derivata non è definita in tale punto. Dunque in $x = 500$, la funzione g_2' ha una singolarità con salto.

Inoltre tra 0 e 500, la concavità di g_2 è rivolta verso l'alto, quindi g_2'' è positiva e di conseguenza g_2' è crescente per $x \in]0; 500[$. Per ragionamenti analoghi, possiamo concludere che g_2' è decrescente per $x > 500$.

Potevamo pervenire alle stesse conclusioni con considerazioni analitiche calcolando e studiando la funzione

$$g_2'(x) = \begin{cases} -\dfrac{10}{x^2} & \text{se } 0 < x < 500 \\ \dfrac{40}{x^2} & \text{se } x > 500 \end{cases}$$

Nella situazione concreta, possiamo osservare che la funzione che descrive la spesa totale continua a crescere ma raddoppia la pendenza dopo i primi 500 minuti, perché da quel momento in poi raddoppia il costo al minuto.

Per quanto riguarda la funzione g_2 che descrive la spesa media al minuto notiamo che, come per il piano tariffario precedente, decresce per i primi 500 minuti, ma poi inverte la tendenza e cresce per avvicinarsi al nuovo costo unitario di 20 centesimi al minuto.

