SOLUZIONE DEL QUESITO 9
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2014

Due insiemi hanno la medesima cardinalità, cioè sono equipotenti, quando si può stabilire una corrispondenza biunivoca (uno a uno) tra i loro elementi.

L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi ha la medesima cardinalità di $\mathbb{N}$, perché fra di essi si può stabilire la corrispondenza biunivoca che segue:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & \dots \end{array}$$

Anche l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è numerabile. Lo si può mostrare scrivendo i suoi elementi in tabella, in questo modo:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{0}{0} & \frac{0}{1} & \frac{0}{2} & \frac{0}{3} & \frac{0}{4} & \dots \\ \frac{1}{0} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots \\ \frac{2}{0} & \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \dots \\ \frac{3}{0} & \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \dots \\ \frac{4}{0} & \frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

e ordinandone gli elementi procedendo lungo diagonali successive, per evidenziare una corrispondenza biunivoca con i numeri naturali:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ \frac{0}{0} & \frac{1}{0} & \frac{0}{1} & \frac{2}{0} & \frac{1}{1} & \frac{0}{2} & \frac{3}{0} & \dots \end{array}$$

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, infine, non è numerabile. Lo si può mostrare considerando un suo sottoinsieme, per esempio quello dei reali strettamente compresi tra 0 e 1, e dimostrando che esso non è numerabile.

Assumiamo per assurdo che tale insieme sia numerabile, ed elenchiamone gli elementi, indicando con (a_{ij}) la j-esima cifra decimale del numero reale di posto i:

$$r_1 = 0,(a_{11})(a_{12})(a_{13})$$

$$r_2 = 0,(a_{21})(a_{22})(a_{23})$$

$$...$$

A questo punto, possiamo certamente costruire un nuovo numero reale compreso tra 0 e 1 la cui prima cifra sia diversa da a_{11}, la cui seconda cifra sia diversa da a_{22}, e così via. Poichè almeno una cifra di tale numero è diversa da tutti gli elementi enumerati, si conclude che l'insieme scelto non è numerabile. Dunque anche $\mathbb{R}$, che lo contiene, non è numerabile.

