SOLUZIONE DEL QUESITO 10
CORSO SPERIMENTALE PNI 2014

Il limite risulta 1 solamente per $a = b = 4$.

Innanzitutto osserviamo che il denominatore tende a 0 per $x \to 0$, quindi, affinché il limite non risulti infinito, è necessario che anche il numeratore tenda a zero.
Poiché

$$\lim_{x \to 0} \left(\sqrt{a + bx} - 2 \right) = \sqrt{a} - 2,$$

e

$$\sqrt{a} - 2 = 0 \quad \iff \quad a = 4,$$

l'unico valore accettabile per il parametro a è 4.
Sostituendo $a = 4$ al limite considerato otteniamo una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$.
Applichiamo il teorema di De L'Hospital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4 + bx} - 2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{b}{2\sqrt{4 + bx}} - 0}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{b}{2\sqrt{4 + bx}} = \frac{b}{4}$$

Tale limite deve valere 1, quindi $b = 4$.
Riscriviamo la funzione ottenuta per i valori $a = 4$ e $b = 4$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{4 + 4x} - 2}{x}$$

Il dominio naturale di f si trova ponendo $4 + 4x \geq 0$ e $x \neq 0$. Dunque il dominio è $[-1; 0[\cup]0; +\infty[$ che in effetti ha 0 come punto di accumulazione. Il limite per $x \to 0$ ha dunque significato e vale proprio 1.