SOLUZIONE DEL QUESITO 10
CORSO DI ORDINAMENTO 2014

La funzione esponenziale è uguale a 1 quando l'esponente è uguale a 0 e la base è qualsiasi, oppure quando la base è uguale a 1 e l'esponente è qualsiasi.

Nel primo caso, i valori reali di x che soddisfano l'uguaglianza sono i valori che annullano l'esponente di $\left(\frac{1}{5}\left(x^2-10x+26\right)\right)^{x^2-6x+1}$, cioè le radici del polinomio di secondo grado x^2-6x+1:

$$x^2-6x+1=0.$$

Il discriminante è $\dfrac{\Delta}{4}=\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-ac=3^2-1=8$, quindi le due radici sono:

$$x_{1,2}=\frac{-\dfrac{b}{2}\pm\sqrt{\dfrac{\Delta}{4}}}{a}=3\pm\sqrt{8}=3\pm2\sqrt{2},$$

che sono i valori che stavamo cercando.
Dobbiamo però assicurarci che non esistano valori di x per i quali potremmo ottenere una forma non definita del tipo 0^0. A tale scopo, studiamo la base della funzione esponenziale: $\dfrac{1}{5}\left(x^2-10x+26\right)$.

$$\frac{1}{5}\left(x^2-10x+26\right)=0\Rightarrow x^2-10x+26=0.$$

Il discriminante è $\dfrac{\Delta}{4}=\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-ac=5^2-26=-1$, che è sempre negativo, quindi non esistono valori di x che annullano il polinomio $x^2-10x+26$. I valori di x trovati in precedenza sono dunque tutti ammissibili.
Nel secondo caso, dobbiamo trovare i valori di x per i quali la base della funzione esponenziale è uguale a 1.

$$\frac{1}{5}\left(x^2-10x+26\right)=1\Rightarrow x^2-10x+26=5\Rightarrow x^2-10x+21=0.$$

Il discriminante è $\dfrac{\Delta}{4}=\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-ac=5^2-21=4$, quindi le radici del polinomio sono:

$$x_{1,2}=\frac{-\dfrac{b}{2}\pm\sqrt{\dfrac{\Delta}{4}}}{a}=5\pm\sqrt{4}=5\pm2\Rightarrow x_1=3,x_2=7.$$

Entrambi i valori sono ammissibili poiché, se sostituiti all'equazione iniziale, non danno luogo alla forma indeterminata 1^∞.
In conclusione, l'insieme dei valori reali di x che verificano l'uguaglianza iniziale è $\left\{3 \pm 2\sqrt{2}, 3, 7\right\}$.

Una risoluzione alternativa del quesito parte dal passaggio iniziale di conversione dell'equazione esponenziale in un'equazione logaritmica:

$$\left(\frac{1}{5}\left(x^2-10x+26\right)\right)^{x^2-6x+1} = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(x^2-6x+1\right)\log\left(\frac{1}{5}\left(x^2-10x+26\right)\right) = 0.$$

Con la legge di annullamento del prodotto si ottengono i valori reali di x che soddisfano l'uguaglianza.