SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2014

1. Una funzione $f(x)$ è simmetrica rispetto al punto $(a; b)$ quando è unita rispetto alle equazioni della simmetria centrale e delle sue inverse:

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2a - x' \\ y = 2b - y' \end{cases}$$

Nel nostro caso il centro è $(2; 0)$:

$$\begin{cases} x = 4 - x' \\ y = -y' \end{cases}$$

Sostituiamo all'equazione $y = (2 - x)\sqrt{4x - x^2}$:

$$\begin{aligned} -y' &= [2 - (4 - x')]\sqrt{4(4 - x') - (4 - x')^2} \\ y' &= (2 - x')\sqrt{16 - 4x' - 16 - x'^2 + 8x'} \\ y' &= (2 - x')\sqrt{4x' - x'^2} \end{aligned}$$

La funzione è pertanto unita per tale trasformazione e il punto $(2; 0)$ è centro di simmetria del grafico Γ.

Calcoliamo la derivata prima $f'(x)$ nel punto $x = 2$; innanzitutto calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = -\sqrt{4x - x^2} + \frac{(2 - x)(4 - 2x)}{2\sqrt{4x - x^2}} = \frac{-4x + x^2 + 4 + x^2 - 4x}{\sqrt{4x - x^2}} = \frac{2x^2 - 8x + 4}{\sqrt{4x - x^2}}$$

Sostituiamo a x il valore 2:

$$f'(2) = \frac{2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 4}{\sqrt{8 - 4}} = \frac{-4}{2} = -2$$

La derivata prima in un punto di una funzione corrisponde al coefficiente angolare della retta tangente al grafico in quel punto. Tale coefficiente coincide con la tangente goniometrica dell'angolo α formato dalla retta col semiasse positivo delle x. Pertanto risulta:

$$\alpha = \operatorname{arctg}(-2) \simeq 116,5651° \simeq 116°34'.$$

2. Consideriamo la funzione derivata prima $f'(x)$ e calcoliamo $f'(2+t)$ e $f'(2-t)$, con $0 < t < 2$:

$$f'(2+t) = \frac{2(2+t)^2 - 8(2+t) + 4}{\sqrt{4(2+t) - (t+2)^2}} = \frac{2t^2 - 4}{\sqrt{-t^2 + 4}}$$
$$f'(2-t) = \frac{2(2-t)^2 - 8(2-t) + 4}{\sqrt{4(2-t) - (t-2)^2}} = \frac{2t^2 - 4}{\sqrt{-t^2 + 4}}$$

Poiché per qualsiasi t, con $0 < t < 2$, i valori di $f'(2+t)$ e $f'(2-t)$ coincidono, le rette tangenti a Γ in tali punti sono parallele.

Consideriamo ora le rette $21x + 10y + 31 = 0$ e $23x + 12y + 35 = 0$. Esse hanno coefficiente angolare rispettivamente $m_1 = -\frac{21}{10}$ e $m_2 = -\frac{23}{12}$, entrambi negativi.

Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \to \frac{2x^2 - 8x + 4}{\sqrt{4x - x^2}} > 0 \to 0 < x < 2 - \sqrt{2} \vee 2 + \sqrt{2} < x < 4$$

Pertanto la funzione $f'(x)$ risulta:

- positiva per $0 < x < 2 - \sqrt{2} \vee 2 + \sqrt{2} < x < 4$;
- negativa per $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$;
- nulla in $x = 2 - \sqrt{2}$ e $x = 2 + \sqrt{2}$.

Inoltre, la funzione $f'(x)$ è strettamente decrescente in $[2 - \sqrt{2}; 2]$ in quanto la funzione $f(x)$ volge la concavità verso il basso in tale intervallo (come si evince dal grafico), con

$$f'(2 - \sqrt{2}) = 0 \text{ e } f'(2) = -2.$$

Analogamente, la funzione $f'(x)$ è strettamente crescente in $[2; 2 + \sqrt{2}]$ in quanto la funzione $f(x)$ volge la concavità verso l'alto in tale intervallo, con

$$f'(2) = -2 \text{ e } f'(2 + \sqrt{2}) = 0.$$

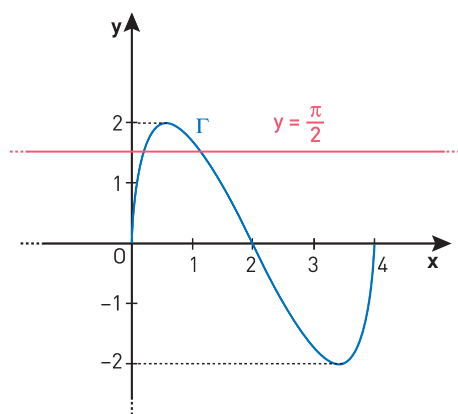
Quindi la funzione derivata $f'(x)$ assume valori negativi compresi tra $[-2; 0[$. Poiché $m_1 = -\frac{21}{10} = -2,1$ non appartiene a tale intervallo, non esiste una retta tangente a Γ parallela alla retta $21x + 10y + 31 = 0$. Invece $m_2 = -\frac{23}{12} \simeq -1,92$ appartiene all'intervallo $[-2; 0[$, perciò esistono due rette tangenti a Γ parallele alla retta $23x + 12y + 35 = 0$.

3. Considerando la simmetria del grafico Γ dimostrata nel punto 1, l'area $\mathcal{A}$ della regione compresa tra Γ e l'asse x è il doppio dell'integrale definito dalla funzione $f(x)$ calcolata in $[0;2]$:

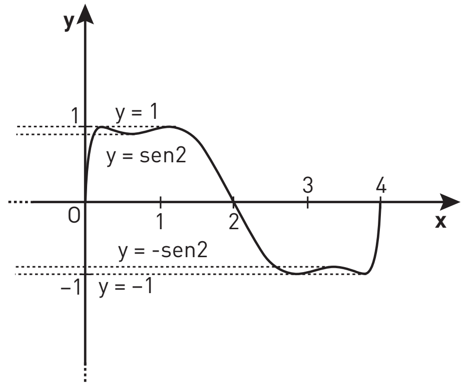
$$\mathcal{A} = 2 \cdot \int_0^2 (2-x)\sqrt{4x-x^2}dx = \int_0^2 (4-2x)\sqrt{4x-x^2}dx =$$
$$= \left[\frac{(4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{3}(4^{\frac{3}{2}}-0) = \frac{16}{3}.$$

4. Sia $h(x) = \text{sen}(f(x))$. Dal punto 2 risulta che $x = 2-\sqrt{2}$ e $x = 2+\sqrt{2}$ sono estremanti della funzione $f(x)$ le cui immagini sono $f(2-\sqrt{2}) = 2$ ed $f(2+\sqrt{2}) = -2$. Il codominio della funzione $f(x)$ è $C = [-2;2]$ in accordo con il grafico assegnato. Risulta che $\text{sen}(f(x)) = 1$ se $f(x) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto l'unico valore accettabile si ha per $k = 0$, ovvero $f(x) = \frac{\pi}{2}$.

   Osservando la figura che rappresenta $y = f(x)$ e $y = \frac{\pi}{2}$ se ne deduce che esistono due valori di x che soddisfano la richiesta.



   Utilizzando le informazioni precedenti e tenendo conto della simmetria di $f(x)$ e del fatto che il seno è una funzione dispari, si può ipotizzare il seguente grafico qualitativo di $y = h(x)$.



Calcoliamo la derivata prima $h'(x)$:

$$h'(x) = \cos(f(x)) \cdot f'(x).$$

Gli estremi relativi vanno ricercati ponendo:

$$h'(x) = 0 \rightarrow \cos(f(x)) = 0 \vee f'(x) = 0 \rightarrow f(x) = \pm\frac{\pi}{2} \vee x = 2 \pm \sqrt{2}.$$

In particolare:

- $f(x) = -\frac{\pi}{2}$ per due valori di x, in corrispondenza dei quali $h(x) = -1$; la funzione $h(x)$ ha due punti di minimo assoluto;
- $x = 2 - \sqrt{2}$ è un punto di minimo relativo e risulta $h(2-\sqrt{2}) = \operatorname{sen} 2 \simeq 0,91$.

Osservando il grafico qualitativo $y = h(x)$ si può dedurre che una retta $y = k$ interseca il corrispondente grafico in quattro punti distinti se:

$$\operatorname{sen} 2 < k < 1 \vee -1 < k < -\operatorname{sen} 2$$

Tenendo conto del significato geometrico dell'integrale definito e della simmetria della funzione $h(x)$ rispetto al punto $(2; 0)$, risulta:

$$\int_0^4 h(x)dx = 0.$$

