SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2014

1. Determiniamo l'espressione analitica di $g(x)$ dividendo il suo dominio in intervalli.

   - La circonferenza di diametro AO ha equazione

     $$(x+2)^2 + y^2 = 4 \rightarrow x^2 + y^2 + 4x = 0 \rightarrow y = \pm\sqrt{-x^2-4x},$$

     quindi nell'intervallo $x \in [-4; 0]$ $g(x)$ ha equazione $g(x) = -\sqrt{-x^2-4x}$, perché si trova nel semipiano $y \leq 0$.

   - La circonferenza passante per O e B, di cui l'arco OB è un quarto di circonferenza, ha centro in (2;0) ed equazione $(x-2)^2+y^2 = 4 \rightarrow x^2+y^2-4x = 0 \rightarrow y = \pm\sqrt{-x^2+4x}$, quindi nell'intervallo $x \in]0; 2]$ $g(x)$ ha equazione $g(x) = \sqrt{-x^2+4x}$, perché si trova nel semipiano $y \geq 0$.

   - Il segmento BC ha equazione $y = 2$; pertanto nell'intervallo $x \in]2; 4]$ $g(x)$ ha equazione $g(x) = 2$.

   - Una parabola avente per asse di simmetria l'asse x ha equazione $x = ay^2 + c$; imponendo le condizioni di passaggio per C e per D si ottiene $c = 6$ e $4 = 4a + 6 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$. Nell'intervallo $x \in]4; 6]$ la funzione $g(x)$ ha quindi equazione

     $$g(x) = \sqrt{12-2x}$$

     perché si trova nel semipiano $y \geq 0$.

Abbiamo pertanto

$$g(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x^2-4x} & \text{per } -4 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{-x^2+4x} & \text{per } 0 < x \leq 2 \\ 2 & \text{per } 2 < x \leq 4 \\ \sqrt{12-2x} & \text{per } 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

Calcoliamo la derivata $g'(x)$:

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x}} & \text{per } -4 < x < 0 \\ \frac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x}} & \text{per } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{per } 2 < x < 4 \\ -\frac{1}{\sqrt{12-2x}} & \text{per } 4 < x < 6 \end{cases}$$

inoltre:

- in A, poiché
$$\lim_{x\to -4^+} g'(x) = \lim_{x\to -4^+} \frac{x+2}{-x^2-4x} = -\infty$$
la funzione non è derivabile;

- in O, poiché
$$\lim_{x\to 0^-} g'(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to 0^+} g'(x) = +\infty,$$
che equivale a dire
$$\lim_{x\to 0} g'(x) = +\infty,$$
la funzione non è derivabile;

- in B, poiché
$$\lim_{x\to 2^-} g'(x) = 0, \lim_{x\to 2^+} g'(x) = 0$$
e $g(x)$ è continua in $x = 2$, la funzione è derivabile con derivata 2;

- in C, poiché
$$\lim_{x\to 4^-} g'(x) = 0 \text{ e } \lim_{x\to 4^+} g'(x) = -\frac{1}{2},$$
la funzione non è derivabile;

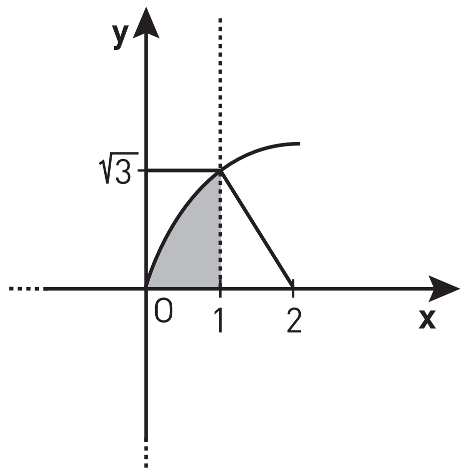
- in D poiché
$$\lim_{x\to 6^-} g'(x) = -\infty$$
la funzione non è derivabile.

2. Calcoliamo i valori richiesti per $f(x) = \int_{-4}^{x} g(t)dt$.

- $f(-4) = \int_{-4}^{-4} f(t)dt = 0$;

- $f(0)$ corrisponde all'area della semicirconferenza di diametro AO, presa con segno negativo: $f(0) = -\frac{\pi \cdot 2^2}{2} = -2\pi$;

- $f(1)$ corrisponde a $f(0)$ a cui va sommata l'area del triangolo mistilineo compreso tra il quarto di circonferenza di centro (2;0) e passante per 0 e la retta $x = 1$.



Tale area è la differenza tra l'area del settore circolare di ampiezza $\alpha = \frac{\pi}{3}$ e l'area di un triangolo rettangolo di cateti 1 e $\sqrt{3}$, quindi:

$$A = \frac{1}{2}\alpha r^2 - \frac{1}{2}b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 1\sqrt{3} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

pertanto $f(1) = -2\pi + \frac{2}{3}\pi = -\frac{4}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- $f(2)$ corrisponde alla somma algebrica fra $f(0)$ e l'area del quarto di circonferenza, che è pari a $\frac{\pi 2^2}{4} = \pi$: $f(2) = 2\pi + \pi = -\pi$.

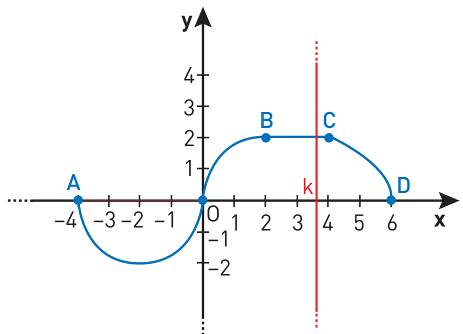
- $f(4)$ corrisponde al valore di $f(2)$ aggiungendo l'area del quadrato compreso tra il segmento BC e l'asse x, cioè $f(4) = f(2) + 2^2 = 4 - \pi$.

- $f(6)$ corrisponde al valore di $f(4)$ a cui va aggiunta l'area del segmento parabolico CD, che si può calcolare in diversi modi: per esempio, si può applicare il teorema di Archimede, e moltiplicare per $\frac{2}{3}$ l'area del quadrato circoscritto, ottenendo $\frac{2}{3} \cdot 2^2 = \frac{8}{3}$; equivalentemente, si può calcolare l'integrale definito

$$\int_4^6 \sqrt{12 - 2x} dx = \left[-\frac{(12 - 2x)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_4^6 = 0 + \frac{4^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{8}{3}.$$

Pertanto $f(6) = 4 - \pi + \frac{8}{3} = \frac{20}{3} - \pi$.

3. Ricaviamo il segno di f riflettendo sul significato geometrico di integrale; per come sono definiti, $f(0)$, $f(1)$ e $f(2)$ sono valori negativi mentre $f(4)$ e $f(6)$ sono valori positivi. Dal teorema fondamentale del calcolo integrale sappiamo che $g = f'$; sappiamo inoltre che la funzione f è continua nell'intervallo]2;4[, pertanto sappiamo anche che avrà uno zero in quell'intervallo, cioè esiste un valore reale $k \in]2;4[$ per cui $f(k) = 0$. Ragioniamo graficamente per ricavare questo valore.



Sappiamo che $f(2) = -\pi$ e che

$$f(k) = f(2) + \int_2^k g(t)dt.$$

Poiché vogliamo che $f(k) = 0$, k deve soddisfare la condizione $\int_2^k g(t)dt = \pi$. Nell'intervallo]2;4[che stiamo considerando $g(x)$ è la funzione costante di equazione $y = 2$; pertanto, come si vede bene dalla figura, quello che stiamo cercando è la lunghezza della base di un rettangolo che stia sotto il segmento BC, che abbia area π e altezza 2. Il valore che cerchiamo è quindi $\frac{\pi}{2}$; ne ricaviamo che $k = 2 + \frac{\pi}{2}$.
Ricapitolando:

- $f(x) = 0$ per $x = -4$ e $x = 2 + \frac{\pi}{2}$;
- $f(x) < 0$ per $-4 < x < 2 + \frac{\pi}{2}$;
- $f(x) > 0$ per $2 + \frac{\pi}{2} < x \leq 6$.

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale possiamo anche dire che $f''(x) = g'(x)$, quindi in base a quanto detto su g' sappiamo che

- $f''(x) < 0$ per $-4 < x < -2$ e $4 < x < 6$;
- $f''(x) > 0$ per $-2 < x < 0$ e $0 < x < 2$;
- $f''(x) = 0$ per $2 < x < 4$.

4. Essendo la funzione $f(x)$ continua sull'intervallo chiuso [-4; 6], essa ammette un massimo e un minimo assoluti all'interno di questo intervallo per il teorema di Weierstrass. Come si deduce facilmente dal grafico di g e dai conti svolti fino a questo punto, nell'intervallo [-4; 0[la funzione f è decrescente; il minimo assoluto si ha in $x = 0$, dove $f(0) = -2\pi$. Nell'intervallo]0; 6] la funzione f è sempre crescente e il massimo assoluto di f sarà in $x = 6$, infatti $f(-4) = 0 < f(6) = \frac{20}{3} - \pi$. L'andamento qualitativo del grafico di f sarà quindi: