SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
CORSO DI ORDINAMENTO 2014

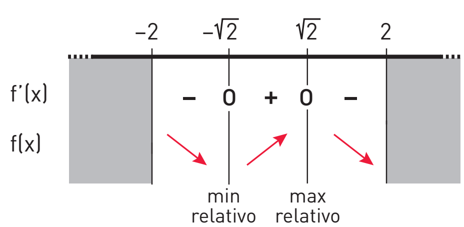
1. Per calcolare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x)$, ne calcoliamo la derivata $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \sqrt{4-x^2} + x\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

La derivata esiste per $x \in]-2;2[$. Studiamo il segno della derivata.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} > 0 \\ 4-2x^2 &> 0 \\ x^2-2 &< 0 \\ -\sqrt{2} &< x \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

La derivata ha segno positivo (e f è crescente) per $x \in]-\sqrt{2};\sqrt{2}[$ e ha segno negativo (e f è decrescente) per $x \in]-2;-\sqrt{2}[\,\cup\,]\sqrt{2};2[$, come si vede dal quadro dei segni di $f'(x)$:



Poiché agli estremi del dominio $f(-2) = f(2) = 0$, risulta:

$x = -\sqrt{2}$ è un punto di minimo assoluto, con $f(-\sqrt{2}) = -2$;

$x = \sqrt{2}$ è un punto di massimo assoluto, con $f(\sqrt{2}) = 2$.

2. L'origine O è centro di simmetria per il grafico Γ della funzione se $f(x)$ è dispari, cioè se $f(-x) = -f(x)$.

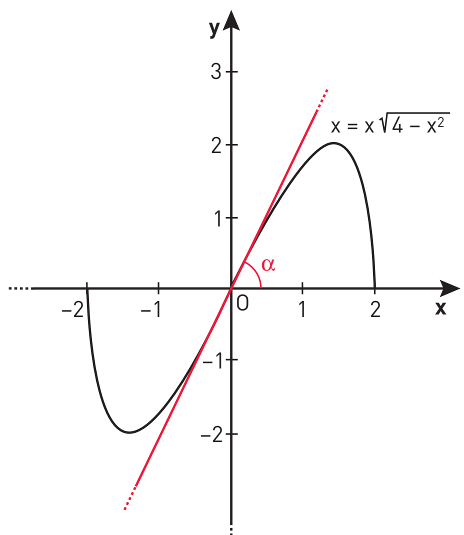
$$f(-x) = (-x)\sqrt{4-(-x)^2)} = -x\sqrt{4-x^2} = -f(x)$$

La funzione f è dispari, per cui possiamo dire che O è centro di simmetria per Γ.

Calcoliamo il valore della derivata prima di f in $x = 0$ per trovare l'angolo α che la tangente in O a Γ forma con l'asse delle x:

$$f'(0) = \frac{4-0}{\sqrt{4-0}} = \frac{4}{\sqrt{4}} = 2 = \operatorname{tg}\,\alpha,$$

quindi $\alpha = \operatorname{arctg}\,2 \simeq 63°26'$



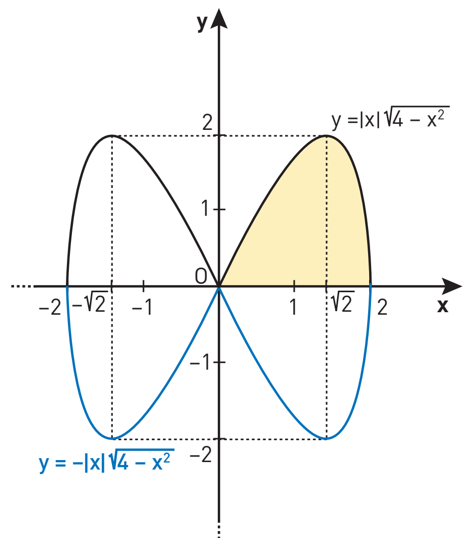
3. La curva $y^2 = x^2(4-x^2)$ è definita per valori di x che rendono $x^2(4-x^2) \geq 0$, poiché y^2 assume sempre valori positivi:

$$x^2(4-x^2) \geq 0$$
$$4 - x^2 \geq 0$$
$$-2 \leq x \leq 2$$

Quindi le condizioni di esistenza della curva sono $x \in [-2; 2]$.
Scriviamo la curva come funzione di x, il grafico della curva è composto dal grafico di due funzioni:

$$g_1(x) = |x|\sqrt{4-x^2} \quad \text{e} \quad g_2(x) = -|x|\sqrt{4-x^2}.$$

Osserviamo che l'unione dei grafici di g_1 e g_2 è congruente all'unione del grafico Γ e del suo simmetrico rispetto all'asse x.



Il grafico della curva $y^2 = x^2(4 - x^2)$ è composto da quattro parti congruenti: per calcolarne l'area racchiusa basta calcolare l'area racchiusa da una delle quattro parti e poi moltiplicare per quattro il valore ottenuto.

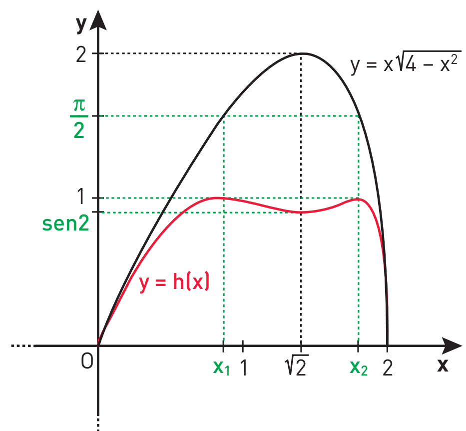
$$\mathcal{A} = 4 \cdot \int_0^2 x\sqrt{4 - x^2}\, dx$$

Riconduciamo l'integrale alla forma $\int_0^2 t'(x) \cdot \sqrt{t(x)}\, dx$ moltiplicando e dividendo per -2:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{4}{-2} \cdot \int_0^2 -2x\sqrt{4 - x^2}\, dx = \\
&= -2 \left[\frac{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \\
&= -2 \cdot \frac{2}{3} \left[(4 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \\
&= -\frac{4}{3}(0 - 4^{\frac{3}{2}}) = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{64} = \frac{32}{3}.
\end{aligned}$$

4. Consideriamo la funzione $h(x) = \operatorname{sen}(f(x))$, con $0 \le x \le 2$.
   Studiamo l'andamento di h confrontandolo con quello di f nell'intervallo $[0; 2]$.

Dallo studio di f, sappiamo che, per $0 \leq x \leq 2$, f assume valori compresi tra 0 e 2, in particolare assume il valore $\frac{\pi}{2}$ due volte, nei punti x_1, x_2. In tali punti si ha $h(x_1) = h(x_2) = 1$. Inoltre $h(0) = h(2) = \text{sen } 0 = 0$.
Per $0 < x < x_1$, la funzione f cresce da 0 a $\frac{\pi}{2}$, quindi h cresce da 0 a 1 nello stesso intervallo. Analogamente, h decresce da 1 a 0 nell'intervallo $x_2 < x < 2$.
Nell'intervallo $x_1 < x < \sqrt{2}$, la funzione f cresce da $\frac{\pi}{2}$ a 2, quindi h decresce da 1 a sen 2. Nell'intervallo $\sqrt{2} < x < x_2$ f decresce da 2 a $\frac{\pi}{2}$, quindi h cresce da sen 2 a 1.



Osservando il grafico, possiamo vedere che la funzione h ha:

- due massimi assoluti nei punti $x = x_1 \in]0; \sqrt{2}[$, $x = x_2 \in]\sqrt{2}; 2[$, con $h(x_1) = h(x_2) = 1$;
- due minimi assoluti nei punti $x = 0$, $x = 2$, con $h(0) = h(2) = 0$;
- un minimo relativo nel punto $x = \sqrt{2}$, con $h(\sqrt{2}) = \text{sen } 2$.

I valori di k per cui l'equazione $h(x) = k$ ha quattro soluzioni distinte sono quelli per cui la retta $y = k$ incontra il grafico di h in quattro punti distinti, quindi per $k \in]\text{sen } 2; 1[$.